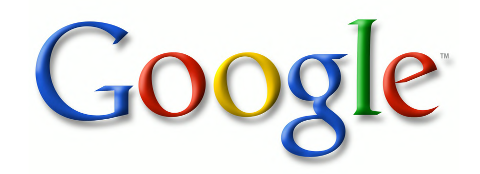






G. Hay.

1894

Erlernung der Elemente der Integralrechnung gewifs vorzuziehen, eine systematische Darstellung der Integralrechnung wird aber das unbestimmte und bestimmte Integral oder die Quadraten erst später als Integral der einfachsten Klasse von Differentialgleichungen behandeln, und man wird dadurch in der Lage sein, gleich von vornherein für beliebige Systeme algebraischer Differentialgleichungen umfassende und allgemein gültige Sätze herzuleiten, die in ihrer einfachsten Spezialisierung die für die Theorie der Quadraturen gültigen Fundamentalsätze der Integralrechnung liefern.

Bei der vorliegenden Bearbeitung der Theorie der algebraischen Differentialgleichungssysteme sind nur die Elemente der Differentialrechnung und Algebra vorausgesetzt worden, aber es konnte in keiner Weise darauf Bedacht genommen werden, etwa all die Einzelheiten, welche besonders die früheren Methoden der Integration für die Herstellung von Integralen ganz spezieller Differentialgleichungen durch die verschiedensten analytischen Kunstgriffe an Resultaten geliefert haben, in das Lehrbuch aufzunehmen, und es war dies um so weniger nötig, als gerade in neuerer Zeit gute und umfassende Beispielsammlungen integrierbarer Differentialgleichungen erschienen sind.

Pasch, Dr. **Moritz**, Professor an der Universität zu Giefsen, Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung. [VIII u. 188 S.] Mit Figuren im Text. gr. 8. 1882. geh. n. ℳ 3.20.

Vielleicht wird für manche Zwecke eine Darstellung brauchbar sein, welche, wie die vorliegende, über die einleitenden Teile der Differential- und Integralrechnung nicht hinausgeht, ihren Gegenstand jedoch möglichst genau und ausführlich zu behandeln sucht. Die Schrift ist im Anschlufs an Vorlesungen über Infinitesimalrechnung und Funktionentheorie (hauptsächlich im Wintersemester 1878/79) ausgearbeitet worden. Da sie nur als Ergänzung zu Vorlesungen oder Lehrbüchern dienen soll, wurde der Stoff entsprechend begrenzt; so blieben z. B. die Differentialquotienten höherer Ordnung aufser Betracht, ebenso die Anwendungen der Theorie; die Tangenten der ebenen Kurven, sowie Quadratur und Rektifikation sind nur herangezogen, um die Begriffsbildung zu erläutern. Für die trigonometrischen Funktionen kann die elementargeometrische Definition bei der analytischen Untersuchung nicht den Ausgangspunkt bilden; indem jene Funktionen aus dem Kreisbogenintegral erzeugt wurden, bot sich zugleich Gelegenheit, den Begriff des Integrationsweges zu erweitern und die Periodizität ohne Zuziehung von komplexen Variabeln zu erklären. Zum Schlufs werden die unendlichen Reihen, insbesondere die Potenzreihen besprochen und die Reihenentwickelungen der elementaren Funktionen gegeben.

Schlömilch, Dr. **Oscar**, Kgl. Sächs. Geh. Schulrath (vorher Professor an der polytechnischen Schule zu Dresden), Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Mit Holzschnitten im Text. Zwei Theile. gr. 8. geh. n. ℳ 13.60.

Einzeln:

I. Theil. Aufgaben aus der Differentialrechnung. 4. Aufl. [VIII u. 336 S.] 1887. n. ℳ 6.—

II. — Aufgaben aus der Integralrechnung. 3. Aufl. [VIII u. 384 S.] 1882. n. ℳ 7.60.

Während einer zwanzigjährigen Lehrerthätigkeit hat der Verf. eine reiche Sammlung von neuen Aufgaben und Beispielen aus der höheren Analysis und deren Anwendungen auf die Geometrie zusammengebracht, deren Veröffentlichung er aus zwei Gründen unternommen hat, einerseits weil eine möglichst grofse Auswahl von derartigen Übungen immer wünschenswert ist, hauptsächlich aber weil selbst die wenigen guten Bücher dieser Richtung sehr empfindliche Lücken zeigen. Das bekannte Werk von Sohncke z. B. enthält über unendliche Reihen weniger, als in jedem Lehrbuche zu finden ist, über Doppelintegrale ein einziges Beispiel, über dreifache Integrale sowie über die Integration der Differentialgleichungen gar nichts — d. h. es fehlen gerade diejenigen überaus wichtigen Partieen, ohne welche man in der Mechanik, mathematischen Physik, physischen Astronomie etc. auch nicht einen Schritt thun kann. Ohne die elementaren Teile der höheren Analysis irgendwie zu vernachlässigen, hat das Werk den genannten schwierigen Partieen besondere Aufmerksamkeit gewidmet und durch zahlreiche mit den nötigen Erläuterungen versehene Beispiele das Studium derselben zu erleichtern versucht. Die dritte Auflage wurde durch eine Reihe neuer Aufgaben vermehrt.

Serret, J.-A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack, Dr. und Professor am Polytechnikum zu Dresden. Zwei Bände. Mit in den Text gedruckten Figuren. gr. 8. geh. n. ℳ 24.40.

Einzeln:

I. Band. Differentialrechnung. [X u. 567 S.] 1884. n. ℳ 10.—

II. — 1. Hälfte: Integralrechnung. [VIII u. 380 S.] 1885. n. ℳ 7.20.

II. — 2. — Differentialgleichungen. [VI u. 388 S.] 1885. n. ℳ 7.20.

ANWENDUNG

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

AUF

DIE ALLGEMEINE THEORIE

DER

FLÄCHEN UND DER LINIEN DOPPELTER KRÜMMUNG.

VON

F. JOACHIMSTHAL.

DRITTE VERMEHRTE AUFLAGE,

BEARBEITET VON L. NATANI.

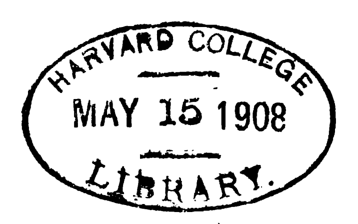


MIT ZAHLREICHEN FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1890.


HARVARD COLLEGE
MAY 15 1908
LIBRARY.

Vorrede zur ersten Auflage.

Die in vorliegendem Werke der Oeffentlichkeit übergebenen Vorlesungen hat der der Wissenschaft und den Hörern viel zu früh entrissene Professor Ferdinand Joachimsthal an der Universität zu Breslau im Wintersemester 1856/57 gehalten, und den Herausgeber, der damals zu seinen Füssen sass, beauftragt, sie wortgetreu nachzuschreiben und für die Herausgabe druckfertig abzufassen. Nach Schluss der Vorlesungen empfing Herr Professor Joachimsthal das Manuscript und hatte nach eingehender Prüfung nichts Wesentliches daran auszusetzen; doch unterblieb die Herausgabe, wohl weil andere Gebiete der Mathematik, namentlich die Elemente der analytischen Geometrie, den hochverehrten Herrn beschäftigten. Wenn der Unterzeichnete erst jetzt, nachdem so viele Jahre verflossen sind, sich entschlossen hat, die Vorträge herauszugeben, so liegt der Grund hauptsächlich darin, dass er lange Anstand genommen hat, selber die letzte Hand an die Druckfertigstellung zu legen. Als er aber einmal daran gegangen war, gaben ihm die hohen Vorzüge des Werkes den Muth, diese Arbeit zu Ende zu bringen, indem er hoffte, dass, was etwa an der Art der Abfassung den Beifall der Kenner nicht haben sollte, über den inneren Vorzügen der Vorlesungen verziehen werden würde. Als solche Vorzüge sei es gestattet, hier — und zwar nicht bloss nach der Meinung des Herausgebers, sondern auch nach dem Urtheile von namhaften Gelehrten, denen das Werk jetzt zur Prüfung vorgelegen hat — nur hervorzuheben, dass die Vorlesungen ein bestimmtes scharf abgegrenztes Gebiet in fasslicher und eleganter Darstellung behandeln, namentlich auch in ihnen die verschiedenen Disciplinen der Mathematik in geistreicher Weise zur Lösung der Probleme herangezogen sind, wie besonders die Geometrie an vielen Stellen die rechnende Lösung vorbereitet, oder ihr nachfolgend die gefundenen Resultate deutet.

Somit wird das Werk für Lernende eine nicht unwillkommene Gabe sein und Studirende der Mathematik an Universitäten und polytechnischen Schulen interessiren.

Reichenbach i. Schl.

Dr. Liersemann.

Vorrede zur dritten Auflage.

Bei der Bearbeitung der zweiten Auflage dieses Buches hatte ich das Bestreben, die von mir hinzugefügten Entwicklungen von dem von Joachimsthal herrührenden Theile getrennt zu halten. Da diese Zusätze aber in dieser dritten Auflage sehr bedeutend vermehrt wurden, war dies undurchführbar, und sind dieselben daher nur im Inhaltverzeichnisse durch das Zeichen * bezeichnet. Das von Joachimsthal Herrührende ist der Sache nach vollständig beibehalten, und nur an einigen Stellen in der Anordnung geändert, ausserdem ist z. B. bei der Theorie der doppelten Krümmung und der geodätischen Linien die Entwicklung umgewandelt oder vereinfacht. Entwicklungen, die den Abhandlungen von Gauss, Jacobi und La Grange entnommen sind, blieben natürlich ungeändert. Der Anhang, den ich der zweiten Auflage hinzugefügt, hat ebenfalls eine Vermehrung erhalten.

Berlin, Juni 1890.

L. Natani.

Inhalt.

†) In § 26 bis 28 ist der schematischen Behandlung wegen von den drei Paraboloiden und den drei Cylindern die Rede, obgleich in der That das parabolische Paraboloid mit dem parabolischen Cylinder zusammenfällt.

*Anhang.

Einleitung.

§ 1.

Erklärung. Man nennt Curven doppelter Krümmung solche krumme Linien, von denen kein endlicher Theil in einer Ebene enthalten ist.

Curve im Raume soll dagegen jede Curve heissen, eben oder nicht, welche auf drei Coordinatenaxen bezogen ist.

Der Begriff der doppelten Krümmung ist zunächst festzustellen. Nehmen wir auf irgend einer Curve die Punkte a, b, c, d u. s. w., deren Entfernung von einander als ins Unendliche abnehmend betrachtet wird, so sind die Geraden $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$ die Richtungen der auf einander folgenden Tangenten. Da nun diese Richtungen im Allgemeinen von einander abweichen, die Curve aber umsomehr sich in dem betreffenden Punkte von einer Geraden unterscheidet, je grösser diese Abweichung ist, so kann man den Winkel, welchen die Verlängerung von ab mit bc bildet, oder vielmehr, da derselbe unendlich klein ist, sein Verhältniss zur Linie $\overline{ab}$ als Maass der Abweichung von einer Geraden im Punkte a betrachten. Dies Verhältniss heisst die erste Krümmung. Sie ist allen Curven, ebenen und nicht ebenen, gemein.

Bei den letzteren aber bestimmen auch je drei auf einander folgende Punkte a, b, c eine Ebene, welche mit der folgenden durch b, c, d gehenden einen ebenfalls unendlich kleinen Winkel macht; das Verhältniss dieses Winkels zur Linie ab bestimmt nun das Maass der Abweichung unserer Curve von einer Ebene und wird die zweite Krümmung genannt.

Anmerkung. Den Ausdruck: Curven doppelter Krümmung hat Clairaut eingeführt. Jedoch verbindet er nicht mit dem Worte Krümmung, wie hier geschehen, den Begriff eines bestimmten Maasses. Jede Curve nämlich ist ihrer Lage und Gestalt nach gegeben, wenn man ihre Projectionen auf zwei Ebenen kennt. Den Fall natürlich ausgeschlossen, wo eine ebene Curve auf zwei auf ihr senkrechte Ebenen projicirt ist, wo dann beide Projectionen gerade Linien, die Curve aber unbestimmt ist. Eine ebene Curve kann nun vollständig

bestimmt werden, wenn eine Projectionsebene auf ihrer Ebene senkrecht steht, also diese Projection eine Gerade, die andre aber eine Curve ist. Dagegen sind bei einer nicht ebenen Curve immer beide Projectionen Curven, sie nimmt also so zu sagen an den Krümmungen zweier Curven Theil, und diese Eigenschaft veranlasste Clairaut zu jener Bezeichnung.

§ 2.

Lehrsatz. Wenn x, y, z irgendwelche, rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinaten sind, so wird eine Curve im Raume analytisch durch zwei Gleichungen zwischen diesen drei Variabeln dargestellt. Dass zwei Gleichungen stattfinden müssen, ergiebt sich aus Folgendem: Um die Curve vollständig zu bestimmen, müssen für jeden Punkt, dessen Abstand z, er sei rechtwinklig oder schiefwinklig, von der xy-Ebene gegeben ist, auch die zugehörigen Abstände x und y von der yz- und zx-Ebene gegeben sein. Dies ist immer der Fall, wenn man eine Gleichung zwischen z und x und eine zweite zwischen z und y hat: $f(x, z) = 0$ und $\varphi(y, z) = 0$ oder allgemeiner wenn zwei Gleichungen zwischen x, y und z gegeben sind: $F(x, y, z) = 0$, $F_1(x, y, z) = 0$, aus welchen sich die erstere Form sogleich wieder herstellen lässt. Die erstere Form hat nun auch eine besondere Bedeutung. Die erste Gleichung stellt eine ebene Curve in der xz-Ebene, die zweite eine solche in der yz-Ebene, also beide die beiden Projectionen auf die xz- und zy-Ebene der Curve vor, durch welche die letztere vollständig bestimmt ist. Will man auch die Projection auf die xy-Ebene haben, so braucht man nur z zu eliminiren.

Indess kann man die Bedeutung dieser Gleichungen auch anders auffassen. Die erste Gleichung bezeichnet auch alle Geraden, welche durch die Curve gehen und der y-Axe parallel sind, die zweite diejenigen Geraden, welche ebenfalls durch die Curve gehen und der x-Axe parallel sind. Die zwei Systeme von Geraden sind aber Cylinderflächen und die Curve ist als Schnittlinie derselben bestimmt.

§ 3.

Es giebt nun noch eine dritte Art der Darstellung der Curven, nämlich dass man jede der drei Coordinaten x, y, z als eine Function von irgend einer vierten Grösse t darstellt: $\begin{cases} x = f(t). \\ y = f_1(t). \\ z = f_2(t). \end{cases}$ Zu dieser letzten Art der Darstellung bilden wir uns zwei Beispiele.

1) Die gerade Linie im Raume. Eine gerade Linie gehe durch einen bestimmten Punkt (a, b, c); bezeichnen wir diesen Punkt mit M, und fixiren wir zugleich eine der beiden von M ausgehenden Richtungen auf der Geraden als positiv, so wird diese Richtung mit jeder der positiven Seiten der Coordinatenaxen einen völlig bestimmten Winkel machen. Die Cosinus dieser drei Winkel nennt man gewöhnlich Richtungscosinus, wir bezeichnen dieselben mit α, β, γ. Sei N ein beliebiger Punkt der Geraden und die Länge MN gleich t, wo t positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem die Richtung MN von M aus als positiv angenommen oder die entgegengesetzte ist. x, y, z seien die Coordinaten von N, die Projectionen von MN auf die drei Axen sind dann: $x - a = t\alpha$, $y - b = t\beta$, $z - c = t\gamma$, woraus sich die Gleichungen der Geraden ergeben:

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma} = t.$$

Möge jetzt eine zweite Gerade die Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ mit den Axen machen, projiciren wir die Strecke t auf diese Gerade und ist noch ϑ der Winkel beider Geraden mit einander, so ist diese Projection gleich $t \cos \vartheta$; wenn aber die drei Projectionen von t auf die Axen $t\alpha, t\beta, t\gamma$ auf die zweite Linie projicirt werden, so erhält man $t\alpha\alpha_1$, $t\beta\beta_1$, $t\gamma\gamma_1$. Die Summe dieser drei letzteren Projectionen ist aber bekanntlich gleich der ersteren, und man hat für den Winkel ϑ zweier beliebigen Geraden die Formel:

$$1) \qquad \cos \vartheta = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1.$$

Sind diese Geraden parallel, oder fallen sie zusammen, also $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$, $\vartheta = 0$, so ergiebt sich:

$$2) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1;$$

eine Formel, welche für die Richtungscosinus jeder Geraden gilt.

Stehen die Linien auf einander senkrecht, so ist:

$$3) \qquad \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0.$$

Aus der Formel 1) wollen wir noch eine häufig gebrauchte Formel ableiten. Es ist:

$$2(1 - \cos \vartheta) = 4\left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^2 = 2 - 2\alpha\alpha_1 - 2\beta\beta_1 - 2\gamma\gamma_1.$$

Ausserdem aber nach 2)

$$2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2;$$

hieraus ergiebt sich

$$4) \qquad 4\left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^2 = (\alpha_1 - \alpha)^2 + (\beta_1 - \beta)^2 + (\gamma_1 - \gamma)^2.$$

Diese Formel findet namentlich dann Anwendung, wenn beide Linien nur unendlich wenig von einander abweichen, dann ist:

$$\alpha_1 = \alpha + d\alpha, \quad \beta_1 = \beta + d\beta, \quad \gamma_1 = \gamma + d\gamma, \quad \sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\vartheta}{2},$$

also:

$$\vartheta = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}. \tag{5}$$

Aus den Gleichungen $x - a = t\alpha$ u. s. w. und der Gleichung 2) ergiebt sich noch:

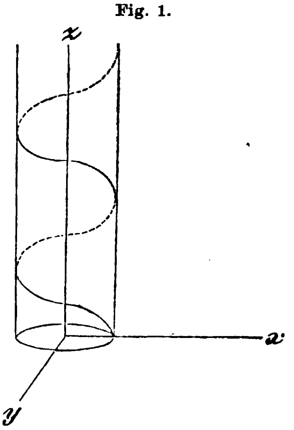
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = t^2 \tag{6}$$

für die Länge der Geraden von dem festen Punkte (abc) bis zum veränderlichen (x, y, z). Das Zeichen von t giebt diese Formel nicht. Damit nun jede Zweideutigkeit ausgeschlossen sei, bemerken wir Folgendes.

Bestimmt man zunächst diejenigen Seiten der drei Axen, welche man als positiv annimmt, so ist jede dieser Seiten beliebig zu nehmen. Es muss dann als positiv diejenige Drehungsrichtung betrachtet werden, welche unter Zurücklegung eines rechten Winkels die positive x-Axe zur positiven y-Axe, diejenige welche letztere zur positiven z-Axe, und diese wieder zur positiven x-Axe führt; bestimmt man nun wie oben geschehen eine der Richtungen unserer Geraden als positiv, so ist auch das Vorzeichen von t gegeben, α, β, γ sind dann immer die Cosinus derjenigen Winkel, welche die positiven Axen mit der als positiv angenommenen Richtung unserer Linie machen.

Wir können aber die Sache auch so auffassen, dass die Linie MN als positiv stets angenommen wird, dann beziehen sich α, β, γ auf diejenigen Winkel, welche die positiven Axen mit MN in der Richtung M zu N machen, wie diese Richtung auch immer fällt.

Fig. 1.



2) Die Schraubenlinie. In der xy-Ebene liege ein Kreis, Fig. 1, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten sei; und auf diesem Kreise stehe normal ein Cylinder. Da wo der Kreis die x-Axe schneidet, fange ein Punkt an, sich auf dem Cylinder derart steigend herumzuwinden, dass seine Steigung proportional ist dem Winkel, welchen seine Projection auf die xy-Ebene in dieser Ebene, d. h. in dem Kreise beschreibt. Welches sind die Gleichungen dieser Curve? — Da jeder Punkt im Raume mit seiner

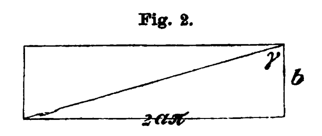
Projection auf eine der drei Coordinatenebenen diejenigen beiden Coordinaten gemeinschaftlich hat, welche in diese Ebene fallen, so ist hier offenbar, wenn der Kreisradius a und der veränderliche Winkel in der xy-Ebene t heisst, $x = a \cdot \cos t$, $y = a \cdot \sin t$, und zwar gelten diese beiden Gleichungen sowohl für den die Curve erzeugenden Punkt, als für seine Projection auf die xy-Ebene, welche der Kreis durchläuft, und als ein Hilfspunkt zu betrachten ist. Hat nun der Hilfspunkt einmal die Peripherie 2π durchlaufen, so wird der eigentliche beschreibende Punkt eine gewisse constante Höhe b erreicht haben. Dieses b nennt man die Höhe eines Schraubenganges, oder die Ganghöhe. Es ist nun $z : b = t : 2\pi$ oder $z = \frac{b \cdot t}{2\pi}$; also sind gefunden die Gleichungen der Schraubenlinie:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = \dfrac{bt}{2\pi} . \end{cases}$$

Dass diese Curve auf einem Kreiscylinder liegt, kann man auch erkennen, wenn man t aus den beiden ersten Gleichungen eliminirt. Man erhält dadurch $x^2 + y^2 = a^2$, zunächst die Gleichung des Grundkreises, und dann die eines auf demselben normal errichteten Cylinders. Eliminirt man t aus der letzten und einer der beiden ersten Gleichungen, so erhält man: $x = a \cdot \cos \frac{2\pi z}{b}$ und $y = a \cdot \sin \frac{2\pi z}{b}$, nach dem vorigen Paragraphen ebenfalls zwei Cylinder. Man kann aber t auch so eliminiren, dass die resultirende Gleichung alle drei Variabeln enthält: $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{2\pi z}{b}$. Was diese bedeutet, werden wir sogleich sehen.

Anmerkung. Die Schraubenlinie kann auch auf folgende Art definirt werden. Man denke sich ein Rechteck so um einen Cylinder gewickelt, dass die Grundlinie desselben mit der Peripherie der Grundfläche des Cylinders zusammenfällt. Die Diagonale bildet dann eine Schraubenlinie (Fig. 2). Ist die Grundlinie gleich der Peripherie der Cylindergrundfläche also gleich $2a\pi$, so wird die Höhe die Ganghöhe der Schraubenlinie sein. Offenbar lässt sich sowohl diese, wie auch die oben gegebene Definition auf beliebige Cylinder leicht ausdehnen.

Fig. 2.



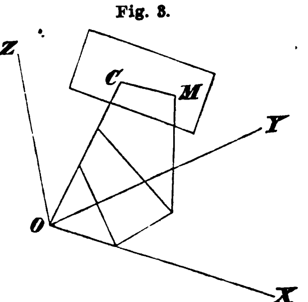
§ 4.

Lehrsatz. Jede Gleichung zwischen drei Variabeln x, y, z stellt eine Fläche dar; und umgekehrt: Jede Fläche wird durch

eine Gleichung zwischen drei Variabeln x, y, z ausgedrückt. Dies ist ebenfalls leicht zu übersehen. Denken wir uns nämlich auf der Ebene xy eine continuirliche Reihe von Punkten, welche einen ganz oder theilweise begrenzten Theil dieser Ebene, oder auch die ganze Ebene ausfüllen, so ist jeder dieser Punkte bestimmt durch die Werthe seiner Coordinaten x und y; errichtet man aber über jeden Punkt eine Gerade, parallel der z-Axe, und giebt dieser eine bestimmte Länge z, so bilden die Endpunkte aller dieser Geraden eine Fläche, wenn man im Allgemeinen Continuität der Längen z voraussetzt, diese Länge z ist aber gegeben, wenn man z als Function von x und y, also $z = f(x, y)$ oder allgemeiner $F(x, y, z) = 0$ hat. Bestimmen wir hiernach die Gleichungen der Ebene.

Möge die auf ihr senkrechte Linie die Richtungscosinus α, β, γ mit den Axen machen, und sei $h = OC$ das vom Anfangspunkte auf sie gefällte Loth, ferner M ein beliebiger Punkt der Ebene, x, y, z seine Coordinaten, so sind die Projectionen von x, y, z auf h bezüglich gleich $x\alpha, y\beta, z\gamma$ (Fig. 3) und da offenbar die Summe derselben gleich h ist:

Fig. 3.



1) $$x\alpha + y\beta + z\gamma = h.$$

Dies ist die Gleichung der Ebene. Schreibt man sie unter der Form $Ax + By + Cz = D$, so ist:

$$A = m\alpha, \quad B = m\beta,$$
$$C = m\gamma, \quad D = mh.$$

Zur Bestimmung von m quadrirt man die drei ersten Gleichungen und addirt sie, welches ergiebt:

2) $$m = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Die Gleichung $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{2\pi z}{b}$ des vorigen Paragraphen drückt eine Fläche aus, auf welcher die Schraubenlinie liegt, und zwar eine durch eben diese Gleichung ganz bestimmte Fläche, die man die Schraubenfläche nennt. Man bemerkt leicht Folgendes: Die Schraubenlinie ist durch zwei Constanten a und b gegeben, die Schraubenfläche enthält nur eine b; es fällt also der Radius des Cylinders a weg. Folglich enthält diese Fläche alle Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe, die auf Rotationscylindern mit beliebigen Grundflächen sich befinden, welche senkrecht auf der xy-Ebene errichtet sind, und deren Axe durch den Anfangspunkt geht. Man kann sich daher die Schraubenfläche so versinnbildlichen, dass man sich von der Axe des leitenden Cylinders aus einen horizontalen Strahl nach der Schraubenlinie ge-

zogen denkt, und diesen stets horizontal so weiter bewegt, dass er nach einander alle Punkte der Cylinderaxe und alle Punkte der Schraubenlinie durchläuft.

§ 5.

Aus dem über die Gleichungen der geraden Linie und der Ebene Gesagten lassen sich leicht die Sätze über Verwandlung der Coordinaten für die rechtwinkligen Axen herleiten.

Mögen beide Systeme denselben Anfangspunkt O haben. Es seien x, y, z die alten, x', y', z' die neuen Coordinaten. Wir bezeichnen die Cosinus der neun Winkel

$$x'x, \quad x'y, \quad x'z, \quad y'x, \quad y'y, \quad y'z, \quad z'x, \quad z'y, \quad z'z$$

bezüglich mit:

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_2 \quad \gamma_2.$$

Wird jetzt durch irgend einen Punkt des Raumes eine Ebene parallel der $y'z'$-Ebene gelegt, so ist die Entfernung derselben vom Anfangspunkte gleich x', also, wenn wir $h = x'$ in 1) des vorigen Paragraphen setzen:

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

und ebenso, wenn wir Ebenen parallel $x'z'$, $x'y'$ durch denselben Punkt legen:

$$y' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,$$
$$z' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z.$$

Legt man aber solche Ebenen bezüglich parallel yz, zx, xy durch den betreffenden Punkt, so erhält man:

$$x = \alpha x' + \alpha_1 y' + \alpha_2 z', \quad y = \beta x' + \beta_1 y' + \beta_2 z', \quad z = \gamma x' + \gamma_1 y' + \gamma_2 z'.$$

Von den neun hier vorkommenden Cosinus sind indess offenbar nur drei willkürlich. Denn z. B. durch die Winkel $x'x$ und $x'y$ ist die Lage der Axe x', und durch den Winkel $y'x$ dann auch die Lage von y' vollständig bestimmt, wodurch auch die Axe z' bestimmt wird. In der That hat man wegen § 3 Formel 2)

$$1)\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad 2)\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \quad 3)\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1$$

und ebenso, wenn man x', y', z' als Axen annimmt:

$$1\text{a})\quad \alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \qquad 2\text{a})\quad \beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1,$$
$$3\text{a})\quad \gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1.$$

Aber nach Formel 3) desselben Paragraphen, da z. B. x' auf y' und z', x auf y und z senkrecht steht:

4) $\beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = 0,$ 5) $\gamma\alpha + \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 = 0,$

4a) $\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0,$ 5a) $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$

6) $\alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0,$

6a) $\alpha_2\alpha + \beta_2\beta + \gamma_2\gamma = 0.$

Von diesen zwölf Gleichungen aber sind, da drei Grössen willkürlich, also nur sechs zu bestimmen, sechs Gleichungen Folgen der übrigen.

Diese Beziehungen nun nehmen noch eine andere in der Anwendung wichtige Form an.

Wir schreiben die Gleichungen 1a), 5) und 6) folgendermassen:

$$a\alpha + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 1,\quad \beta\alpha + \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 = 0,\quad \gamma\alpha + \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 = 0,$$

wo nach Schluss der Rechnung für a, a_1 und a_2 gesetzt werden soll α, α_1 und α_2. Es würden also während der Rechnung unsere drei Gleichungen in Bezug auf α, α_1, α_2 als linear betrachtet, und wir erhalten:

$$\alpha\Delta = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2,\quad \alpha_1\Delta = \beta_2\gamma - \gamma_2\beta,\quad \alpha_2\Delta = \beta\gamma_1 - \gamma\beta_1,$$

wo $\Delta = a(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) + a_1(\beta_2\gamma - \gamma_2\beta) + a_2(\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1)$

oder:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix};$$

also, wenn man a, a_1, a_2 durch α, α_1, α_2 ersetzt, und entsprechende Werthe für β, β_1, β_2, γ, γ_1, γ_2 bildet:

7) $\alpha\Delta = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2,$ 8) $\alpha_1\Delta = \beta_2\gamma - \gamma_2\beta,$ 9) $\alpha_2\Delta = \beta\gamma_1 - \gamma\beta_1,$

10) $\beta\Delta = \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2,$ 11) $\beta_1\Delta = \gamma_2\alpha - \alpha_2\gamma,$ 12) $\beta_2\Delta = \gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1,$

13) $\gamma\Delta = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2,$ 14) $\gamma_1\Delta = \alpha_2\beta - \beta_2\alpha,$ 15) $\gamma_2\Delta = \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1,$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Die Grösse Δ hat aber einen constanten Werth, den man folgendermassen bestimmt: Werden die Gleichungen 7), 8), 9) quadrirt und addirt, so erhält man:

$$(\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2)\Delta^2 = (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)^2 + (\beta_2\gamma - \gamma_2\beta)^2 + (\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1)^2,$$

d. h.:

$$\Delta^2 = (\beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2)(\gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) - (\beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2)^2$$

oder
$$\Delta^2 = 1$$

und hieraus (16) ..... $\Delta = \pm 1$. Hiernach können wir auch die

Gleichungen 7) bis 15), wenn wir die oberen Zeichen zusammen und die unteren Zeichen zusammen gelten lassen, mit Anwendung partieller Differentialquotienten so schreiben:

$$\pm\alpha = \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}, \quad \pm\alpha_1 = \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_1}, \quad \pm\alpha_2 = \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_2};$$

$$\pm\beta = \frac{\partial\Delta}{\partial\beta}, \quad \pm\beta_1 = \frac{\partial\Delta}{\partial\beta_1}, \quad \pm\beta_2 = \frac{\partial\Delta}{\partial\beta_2};$$

$$\pm\gamma = \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma}, \quad \pm\gamma_1 = \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_1}, \quad \pm\gamma_2 = \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_2}.$$

§ 6.

Es lässt sich aber auch bestimmen, in welchem Falle $\Delta = +1$ und in welchem es $= -1$ ist. Zu dem Ende schicken wir folgende Betrachtung voraus.

Denken wir uns ein rechtwinkliges Coordinatensystem, so kann, wenn einmal die xy-Ebene auch in Beziehung auf das Vorzeichen ihrer Coordinaten bestimmt ist, die positive z-Axe selbstverständlich nur zwei verschiedene Lagen haben: entweder oberhalb oder unterhalb dieser Coordinatenebene. Bestimmen wir nun den Cyklus der Aufeinanderfolge der Axen so, dass auf die x-Axe die der y und auf diese die der z folgt, welche also wiederum die der x hinter sich hat, so ergiebt sich leicht Folgendes:

Stellen wir uns bei der ersten Lage der z-Axe (oberhalb der xy-Ebene) in die x-Axe so, dass unsere Füsse auf der yz-Ebene stehen und der Kopf in der x-Axe liegt, Fig. 4a, so erfolgt die Drehung von der y- zur z-Axe von links nach rechts. Stellen wir uns jetzt ebenso in die y-Axe, und sehen die Drehung von der z- nach der x-Axe, so erfolgt diese in derselben Richtung, und ebenso verhält sich zu uns die Drehung von der x- nach der y-Axe, wenn wir in der z-Axe stehen. In dem ersten Systeme geht also die angegebene Drehung von einer Axe zur folgenden, wenn man sich in die dritte Axe gestellt denkt, überall von links nach rechts. Im zweiten Systeme dagegen ist, wenn sonst sich nichts ändert, als eben nur die Lage der z-Axe, Fig. 4b, die Drehung überall umgekehrt, nämlich von rechts nach links.

Fig. 4a.

z x y

Fig. 4b.

x y z

Wir wollen hiernach zwei Coordinatensysteme **gleichstimmig** nennen, wenn bei gleicher Aufeinanderfolge der Axen die Drehung entweder in beiden von links nach rechts oder in beiden von rechts nach links geschieht. Dagegen

nennen wir zwei Coordinatensysteme **ungleichstimmig**, wenn die Drehungsrichtung in dem einen Systeme die entgegengesetzte der andern ist. — Nur im ersteren Falle kann man das zweite System aus dem ersten als durch blosse Drehungen hervorgegangen denken. Hiernach beweisen wir folgenden

Lehrsatz. Wenn das neue Coordinatensystem mit dem gegebenen gleichstimmig ist, so ist $\Delta = +1$; wenn sie nicht gleichstimmig sind, so ist $\Delta = -1$.

Beweis. Sind die beiden Systeme wiederum $x\,y\,z$ und $x'\,y'\,z'$, immer mit demselben Anfangspunkte, aber sonst ganz beliebig gegen einander liegend, so wollen wir uns das erste fest denken und das zweite um den festen Anfangspunkt drehen. Dann sind offenbar die neun Richtungscosinus bei jeder neuen Lage des neuen Systems andere als bei jeder anderen Lage, und zwar so, dass sie sich für zwei einander unendlich nahe Lagen des neuen Systems nur um unendlich wenig von einander unterscheiden. Daraus folgt, dass auch der Werth des Δ in zwei unendlich nahen Lagen sich nur unendlich wenig ändern wird, also nicht von $+1$ zu -1 überspringen, wenn irgend eine Drehung stattfindet und dadurch eine Lage in die andere übergeht. Der Werth des Δ ist nun entweder $+1$ oder -1. Daraus folgt mit Nothwendigkeit: er muss für beide Lagen constant sein. War er in der ersten Lage $+1$, so muss er auch in jeder zweiten Lage $+1$ sein, und war er immer -1, so ist er immer -1. Bei der ganzen Bewegung des zweiten Systems bleibt also der Werth des Δ unverändert. Man kann nun durch continuirliche Verrückung das zweite System in eine solche Lage bringen, dass die positive x'-Axe mit der positiven x-Axe zusammenfällt, und die positive y'-Axe mit der positiven y-Axe. Die positive z'-Axe kann alsdann zwei verschiedene Lagen annehmen: sie kann mit der positiven z-Axe zusammen- oder zu ihr in entgegengesetzte Richtung fallen. — Fallen erstens die beiden positiven Halbaxen der z und z' zusammen, oder mit anderen Worten: sind die beiden Systeme gleichstimmig, so sind für diese specielle Lage die Transformationsformeln der Coordinaten folgende:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

folglich

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0;\ \alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 1,\ \gamma_1 = 0;\ \alpha_2 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \gamma_2 = 1.$$

Daraus folgt aber $\Delta = +1$, und da durch irgend welche Bewegung des zweiten Systems der Werth von Δ sich gar nicht ändert, so ist auch der ursprüngliche Werth des Δ, d. h. der bei der ursprünglichen Lage des zweiten Systems, $+1$ gewesen. — Nehmen wir aber

zweitens an, dass bei dem Zusammenfallen des x' mit x, des y' mit y die z-Axen entgegengesetzte Richtung hätten, d. h. dass wir mit zwei ungleichstimmigen Systemen zu thun hätten, so würden wir bekommen $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$, und dann würde der Werth $\Delta = -1$ sein, denn von den Transformationscoefficienten sind alle Null ausser α welches $= 1$, β_1 welches $= 1$, γ_2 welches $= -1$ ist. In diesem zweiten Falle ist folglich auch bei der ursprünglichen Lage der beiden Systeme $\Delta = -1$.

Anmerkung. Handelt es sich nicht um zwei gegebene Coordinatensysteme, sondern hat man bei einer Untersuchung die Wahl der Transformation, so wird man in der Regel annehmen, dass das neue System mit dem alten gleichstimmig ist. Sonst kann man je zwei ungleichstimmige Systeme in gleichstimmige verwandeln, indem man die eine Axe, etwa die z-Axe, in entgegengesetzter Richtung nimmt.

§ 7.

Die hier gegebenen Formeln empfehlen sich namentlich durch die Symmetrie, haben indess den Nachtheil, dass zwölf Grössen, nämlich die Cosinus α, β, ... eingeführt werden müssen, von denen nur drei willkürlich sind, die Bestimmung der anderen aber eine nicht unbedeutende Rechnung erfordert. Aus diesem Grunde hat Euler eine andere Art der Transformation der Coordinaten eingeführt, bei welcher nur drei Winkel vorkommen, von welchen dann die neuen Coordinaten allein abhängen. Hierbei geht allerdings die Symmetrie der Formeln verloren, und es wird von der Art des Problems abhängen, welche Methode die vortheilhafteste ist.

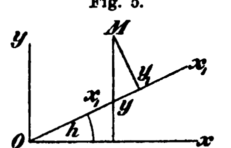
Wir geben hier diese Euler'sche Methode, wobei wir beide Systeme als gleichstimmig betrachten. (Sollte dies nicht der Fall sein, so ist ja nur bei einer der Coordinaten das Vorzeichen zu ändern.)

Wir setzen voraus, dass beide Systeme gleichen Anfangspunkt O haben. Dann seien: h und k die Winkel, welchen die als positiv angenommene Seite des Durchschnittes der Ebenen xy und $x'y'$ bezüglich mit den Axen OX und OX' machen, und i der Winkel zwischen den positiven Seiten der Axen OZ und OZ'. Durch diese drei Winkel h, k, i ist offenbar das neue Coordinatensystem $x'y'z'$ völlig bestimmt. Nun wird (Fig. 5):

I. Ebene xy in der Richtung, die vom positiven OX zum positiven OY führt, um den Winkel h um OZ gedreht, dann fällt OX in den betrachteten Durchschnitt. Die auf die so veränderten Axen

bezüglichen Coordinaten bezeichnen wir mit x_1, y_1, z_1, wo $z_1 = z$ ist. Der Durchschnitt wird dann Axe OX_1. Sei N der Punkt, auf den sich die Coordinaten beziehen, M' (Fig. 5) seine Projection auf Ebene xy, so ist offenbar:

Fig. 5.



1) $$x = x_1 \cos h - y_1 \sin h,$$
$$y = x_1 \sin h + y_1 \cos h, \quad z = z_1.$$

II. Nun drehen wir Ebene $y_1 z_1$ so um Ox_1, dass die positive Seite von Oy_1 den Winkel i beschreibt, dann fällt Ebene $x_1 y_1$ mit Ebene $x'y'$ zusammen. Seien die auf die neue Lage der Axen bezogenen Coordinaten nun $x_2\, y_2\, z_2$, so ergiebt sich wie in I. (indem wir $x\, y\, z\, x_1\, y_1\, z\, h$ bezüglich mit $y_1\, z_1\, x_1\, y_2\, z_2\, x_2\, i$ vertauschen):

$$x_1 = x_2, \quad x_1 = y_2 \cos i - z_2 \sin i, \quad z_1 = y_2 \sin i + z_2 \cos i.$$

Diese Gleichungen und die Gleichungen 1) geben dann:

2) $$x = x_2 \cos h - y_2 \sin h \cos i + z_2 \sin h \sin i,$$
$$y = x_2 \sin h + y_2 \cos h \cos i - z_2 \cos h \sin i,$$
$$z = y_2 \sin i + z_2 \cos i.$$

III. Endlich drehen wir Ebene $x_2 y_2$ so um OZ_2, dass die positive Axe OX_2 den Winkel k beschreibt; die auf die veränderten Axen bezüglichen Coordinaten sind dann die verlangten mit $x'\, y'\, z'$ bezeichneten. Ihre Werthe ergeben sich aus den Formeln 1), wenn man $x\, y\, z\, x_1\, y_1\, z_1\, h$ mit $x_2\, y_2\, z_2\, x'\, y'\, z'\, k$ vertauscht, also:

$$x_2 = x' \cos k - y' \sin k, \quad y_2 = x' \sin k + y' \cos k, \quad z_2 = z'$$

in Verbindung mit Formel 2):

3) $$x = x' (\cos h \cos k - \sin h \sin k \cos i)$$
$$- y' (\cos h \sin k + \sin h \cos k \cos i) + z' \sin h \sin i,$$
$$y = x' (\sin h \cos k + \cos h \sin k \sin i)$$
$$- y' (\sin h \sin k - \cos h \cos k \sin i) - z' \cos h \cos i,$$
$$z = z' \sin k \sin i + y' \cos k \sin i + z' \cos i,$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Aber auch die Werthe der zwölf Cosinus $\alpha\, \beta\, \gamma\, \alpha_1 \ldots$ ergeben sich aus diesen Formeln durch $h\, k\, i$ ausgedrückt, wenn man die Coefficienten von $x'\, y'\, z'$ in diesen Formeln und denen des § 5 gleichsetzt.

Anmerkung. Sollen nicht allein die Richtungen der Coordinatenaxen, sondern auch der Anfangspunkt geändert werden und sind a, b, c die Coordinaten des neuen Anfangspunktes O', so ist in den Formeln dieses und des vorigen Paragraphen für x, y, z nur $x = x' + a$, $y = y' + b$, $z = z' + c$ zu schreiben.

Erster Abschnitt.

Curven im Raume.

Tangente und Normalebene.

§ 8.

Erklärung. Tangente einer Curve ist diejenige Linie, welche durch einen Curvenpunkt und einen ihm unendlich nahen zweiten Punkt der Curve gezogen ist; dies ist so zu verstehen: Man denke sich zunächst durch irgend welche zwei Punkte einer Curve eine gerade Linie (Sehne) gezogen, und lasse alsdann den zweiten Curvenpunkt sich dem ersten immer mehr nähern, wobei er sich natürlich auf der Curve selbst bewegt; alsdann ist die Tangente die Grenzlage dieser beweglichen Geraden.

Aufgabe. An einen gegebenen Punkt (x, y, z) einer durch ihre Gleichungen gegebenen Curve die Tangente zu ziehen. Betrachten wir die Coordinaten der Curve x, y, z als Functionen der vierten unabhängigen Variabeln t und lassen wir einem zweiten Werthe $t + h$ dieser Variabeln einen zweiten Curvenpunkt x_1, y_1, z_1 entsprechen, d. h. einen Punkt, dessen Coordinaten sind:

$$x_1 = x + \Delta x, \quad y_1 = y + \Delta y, \quad z_1 = z + \Delta z,$$

wo $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ die bezüglichen Zunahmen sind, welche x, y, z erhalten, wenn man t durch $t + h$ ersetzt, so sind die beiden Gleichungen einer Geraden, welche durch diese zwei Punkte hindurchgeht,

$$\frac{\xi - x}{x_1 - x} = \frac{\eta - y}{y_1 - y} = \frac{\zeta - z}{z_1 - z},$$

wenn wir ξ, η, ζ ihre laufenden Coordinaten nennen. Setzt man statt der Coordinaten x_1, y_1, z_1 ihre Werthe ein, so ergiebt sich:

$$\frac{\xi - x}{\Delta x} = \frac{\eta - y}{\Delta y} = \frac{\zeta - z}{\Delta z}.$$

Aber da mit abnehmendem h gesetzt werden kann:

$$\frac{\Delta x}{h} = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{\Delta y}{h} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{\Delta z}{h} = \frac{dz}{dt},$$

so erhalten wir als die Gleichungen der Tangente:

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dt}},$$

ganz gleich, was für Coordinaten gewählt werden, rechtwinklige oder schiefwinklige; denn die Gleichung der Geraden, von der wir ausgegangen sind, ist ganz unabhängig von der Wahl der Coordinaten.

Anmerkung. Für die Variable t kann man auch die Bogenlänge s denken. Seien noch $\frac{dx}{ds} = x'$, $\frac{dy}{ds} = y'$, $\frac{dz}{ds} = z'$, so werden die Gleichungen des Tangente:

$$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'}.$$

Auch kann $t = x$ gesetzt werden, woraus man erhält:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{dz}{dx}(\xi - x).$$

Die Neigung, welche die Tangente zu den drei Coordinatenaxen hat, bestimmt sich nach den allgemeinen Formeln für die Neigung einer Geraden zu den Axen. Sind α, β, γ die Richtungscosinus der Tangente, so erhält man:

$$\alpha = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}, \quad \beta = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

$$\text{und} \quad \gamma = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}.$$

So ist z. B. für die Schraubenlinie, wo $x = a \cdot \cos t$, $y = a \cdot \sin t$, $z = \frac{bt}{2\pi}$ ist,

$$\alpha = \frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4\pi^2}}}, \quad \beta = \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4\pi^2}}},$$

$$\gamma = \frac{b}{2\pi\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4\pi^2}}} = \frac{b}{\sqrt{4a^2\pi^2 + b^2}}.$$

Bei dem letzten Ausdrucke ist zu merken, dass er die Grösse t gar nicht enthält: der Winkel γ ist also constant für alle Punkte der Schraubenlinie, oder die Tangente der Schraubenlinie bildet mit der z-Axe einen constanten Winkel. Da der Winkel, den sie mit der xy-Ebene bildet, das Complement dieses constanten Winkels ist,

so kann man auch sagen: die Neigung der Schraubenlinie gegen die Ebene des Grundkreises ist constant. Aus der in der Anmerkung zu § 2 gegebenen Definition der Schraubenlinie ergiebt sich dies als selbstverständlich auch dann, wenn der Cylinder kein Rotationscylinder ist.

Bemerkung. Der Ausdruck: $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ hat eine sehr einfache Bedeutung. Nimmt man nämlich einen beliebigen Punkt der Curve als Anfangspunkt der Bogen s, die von da an jeder bis zu einem für ihn bestimmten Punkte x, y, z gezählt werden, so wird diese Grösse s ausser von den gegebenen constanten Coordinaten des Ausgangspunktes noch eine Function der Grösse t sein, und zwar lässt sich leicht der Differentialquotient dieser Function nach t finden; es ist nämlich $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$. Denn die Länge eines Bogens ist die Grenze für die Summe der Seiten der Polygone, die man der Curve einschreiben kann. Das Bogenelement ds ist also gleich der unendlich kleinen Sehne zwischen zwei unendlich nahen Punkten xyz und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; die Entfernung dieser beiden Punkte von einander wird aber eben durch den Ausdruck $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ bestimmt. Hieraus ergiebt sich, wenn wir die Bezeichnung $\frac{dx}{ds} = x'$ u. s. w. anwenden: $\alpha = x'$, $\beta = y'$, $\gamma = z'$.

So ist in Bezug auf die Schraubenlinie $\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4\pi^2}}$, oder $s = t\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4\pi^2}} + c$, worin sich die Constante c nach dem Werthe von t richtet, für welchen $s = 0$ sein soll. Lässt man z. B. die Schraubenlinie von der xy-Ebene anfangen, so ist $s = 0$ für $t = 0$. Bei diesem Anfange der Schraubenlinie, den wir übrigens von vorn herein festgesetzt haben, ist also $s = t \cdot \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4\pi^2}}$. Berechnen wir einen Gang der Schraubenlinie, so ist $t = 2\pi$, also $s = \sqrt{(2a\pi)^2 + b^2}$, was auch nach dem Pythagoreischen Satze aus dem obenerwähnten Rechtecke klar ist.

Dann ist noch allgemein:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

und durch nochmalige Differentiation nach dem als unabhängig angesehenen s erhält man:

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Jede Curve im Raume hat unendlich viele Normalen, denn es

lassen sich auf der Tangente als einer geraden Linie im Raume in jedem Punkte, folglich auch im Berührungspunkte unzählig viele Linien normal errichten, welche alle in einer Ebene liegen. Daher spricht man bei solchen Curven von einer Normalebene und versteht darunter diejenige, welche im Berührungspunkte auf der Tangente normal steht, und deren Gleichung somit ist:

$$\frac{dx}{dt}(\xi - x) + \frac{dy}{dt}(\eta - y) + \frac{dz}{dt}(\zeta - z) = 0.$$

Theorie der beiden Krümmungen.

§ 9.

Die Definition der beiden Krümmungen einer Curve ist bereits in § 1 gegeben. Es sollen hier noch einige damit zusammenhängende Grössen definirt und die nöthigen Rechnungen ausgeführt werden.

Da nach vorigem Paragraphen die Sehne zwischen zwei einander unendlich nahen Punkten a und b die Richtung der Tangente in a, und die Sehne durch die ebenfalls unendlich nahen Punkte b und c die Richtung der Tangente in b angeben, so kann die erste Krümmung auch definirt werden als der unendlich kleine Winkel zweier durch a und b gehenden benachbarten Tangenten, dividirt durch den Bogen $ab = ds$, welcher mit der Sehne ab zusammenfällt. Dieser unendlich kleine Winkel heisst Contingenzwinkel. Die drei benachbarten Punkte a, b, c bestimmen aber auch die Richtung einer Ebene. Diese wird Osculations-, Krümmungs- oder Schmiegungsebene genannt. Sie bestimmen ferner der Lage und dem Radius nach einen durch alle drei Punkte gehenden Kreis, dieser heisst Osculations- oder Krümmungskreis, demselben entsprechen der Krümmungsradius und der Krümmungsmittelpunkt. Da die Punkte a, b, c auch dem Krümmungskreise angehören, so sind die durch ab und bc gelegten Tangenten auch Tangenten des Krümmungskreises, und der durch a gehende Krümmungsradius ist zugleich eine Normale der Curve. Diese Normale heisst Hauptnormale des Punktes a, sie kann auch definirt werden als die Normale in der Krümmungsebene, und geht stets durch den Krümmungsmittelpunkt. Zieht man in der durch a gehenden Krümmungsebene einen zweiten Krümmungsradius durch b, so ist der Winkel zwischen beiden Krümmungsradien derselbe, als welcher von den beiden benachbarten Tangenten gemacht wird. Der letztere fällt ebenfalls mit einer Normale der Curve zusammen, jedoch nicht mit der Hauptnormale, da er nicht in die zu b gehörige Krümmungsebene fällt.

Denkt man sich endlich einen vierten Punkt d unendlich nahe an c, so bestimmen die Punkte bcd eine zweite Osculationsebene, der Winkel derselben mit der durch abc gehenden dividirt durch Bogen oder Sehne $ab = ds$ ist dann die zweite Krümmung.

§ 10.

Es sollen nun die eben definirten Grössen der Rechnung unterworfen werden.

Es seien α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Tangente mit den Axen macht, λ, μ, ν die bezüglichen Cosinus für die Hauptnormale, a, b, c für das Loth auf die Krümmungsebene, r der Krümmungsradius, δ die erste, ε die zweite Krümmung, ξ, η, ζ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes. Also auch δds der Winkel zwischen zwei nächsten Tangenten, εds der zwischen zwei nächsten Krümmungsebenen.

Von diesen Grössen sind zunächst bekannt:

$$\alpha = x', \quad \beta = y', \quad \gamma = z' \quad (\S\ 8),$$

wenn man unter x', y', z' die Differentialquotienten von x, y, z nach dem Bogen s genommen versteht. Der Winkel zweier nächsten Tangenten ist gleich δds, also, wenn man in § 3 Formel 5) für ϑ diesen Werth setzt:

$$\delta^2 ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2,$$

oder

$$\delta^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2,$$

wenn x'' u. s. w. die zweiten Differentialquotienten nach dem Bogen sind.

Aus diesem Werthe für die erste Krümmung erhält man sofort den für den Krümmungsradius. Da nämlich zwei auf einander folgende Radien des Krümmungskreises denselben Winkel wie die zugehörigen Tangenten machen, so hat man: $r\delta ds = ds$, oder

$$1) \qquad r = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}.$$

Was das Vorzeichen des Krümmungsradius anbetrifft, so soll dasselbe als positiv angenommen werden in der Richtung von der Curve zum Krümmungsmittelpunkte.

Wenn wir nun den Krümmungsradius auf die drei Axen projiciren, erhalten wir:

$$2) \qquad r\lambda = \xi - x, \quad r\mu = \eta - y, \quad r\nu = \zeta - z,$$

wo noch ξ, η, ζ, sowie λ, μ, ν zu bestimmen sind.

Die Gleichung des Krümmungskreises ist nun:

$$(u - \xi)^2 + (v - \eta)^2 + (w - \zeta)^2 = r^2.$$

Da dieser durch drei auf einander folgende Punkte der Curve geht, so kann man für u, v, w bezüglich auch setzen:

$$x, y, z, \quad x + x'ds, \quad y + y'ds, \quad z + z'ds,$$

woraus man erhält:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = r^2,$$

und wenn man für $ux + x'ds$ u. s. w. schreibt und die eben gefundene Gleichung subtrahirt, oder was dasselbe ist, die letztere nach x, y, z differentiirt, so erhält man:

$$(x - \xi)x' + (y - \eta)y' + (z - \zeta)z' = 0.$$

Da aber unser Kreis noch durch einen dritten benachbarten Punkt geht, so ist für diesen zu ersetzen x durch $x + x'ds$, x' durch $x' + x''ds$ u. s. w.; setzt man dies in die letzte Gleichung und subtrahirt dann die ursprüngliche, was wieder dem Differentiiren derselben gleichkommt, so ergiebt sich:

$$(x - \xi)x'' + (y - \eta)y'' + (z - \zeta)z'' = -1.$$

Für die Krümmungsebene selbst aber gilt die Gleichung:

$$a(u - \xi) + b(v - \eta) + c(w - \zeta) = 0,$$

aus dem angeführten Grunde kann auch in dieser Gleichung u, v, w durch x, y, z ersetzt und die entstehende Gleichung zweimal differentiirt werden, also:

$$a(x - \xi) + b(y - \eta) + c(z - \zeta) = 0,$$
$$ax' + by' + cz' = 0,$$
$$ax'' + by'' + cz'' = 0.$$

Die drei Gleichungen multipliciren wir bezüglich mit 1, h und $-k$, addiren dann und bestimmen h und k so, dass die Coefficienten von a und b verschwinden, wo dann der von c von selbst wegfällt. Wir erhalten:

$$x - \xi + hx' = kx'',$$
$$y - \eta + hy' = ky'',$$
$$z - \zeta + hz' = kz''.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen aber bezüglich mit x', y', z' und addirt, so hat man da nach dem Vorigen

$$(x - \xi)x' + (y - \eta)y' + (z - \zeta)z' = 0,$$

da auch $\qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$:

$h = 0$, also:

$$(x - \xi) = kx'', \quad (y - \eta) = ky'', \quad (z - \zeta) = kz''.\text{*)}$$

---

*) Diese Methode wird öfter angewandt werden.

Hier ist noch k zu bestimmen. Multiplicirt man diese Gleichungen bezüglich mit x'', y'', z'' und addirt, so ergiebt sich nach dem Vorigen:

$$-1 = k\delta^2 \quad \text{oder} \quad r^2 = -k,$$

also:

3) $$\xi - x = r^2 x'', \quad \eta - y = r^2 y'', \quad \zeta - z = r^2 z''.$$

Hieraus erhält man die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes ξ, η, ζ.

Wegen Gleichung 2) sind dann auch die Cosinus der Winkel des Krümmungshalbmessers oder der Hauptnormale mit den Axen bekannt; nämlich:

4) $$\lambda = r x'', \quad \mu = r y'', \quad \nu = r z''.$$

§ 11.

Bestimmen wir noch die Cosinus der Winkel a, b, c, welche das Loth auf die Krümmungsebene mit den Axen macht, aus denen sich dann die Gleichung der Krümmungsebene:

$$a(u - \xi) + b(v - \eta) + c(w - \zeta) = 0$$

ergiebt. Zu dieser Bestimmung hat man die Gleichungen:

$$ax' + by' + cz' = 0, \quad ax'' + by'' + cz'' = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Es ergiebt sich aus den beiden ersten:

$$a = m(y'z'' - z'y''), \quad b = m(z'x'' - x'z''), \quad c = m(x'y'' - y'x'');$$

und aus der dritten:

$$m^2 \{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2\} = 1.$$

Für letztere Gleichung kann man schreiben:

$$m^2 \{x''^2(1 - x'^2) + y''^2(1 - y'^2) + z''^2(1 - z'^2) - 2(x'x''y'y'' + y'y''z'z'' + z'z''x'x'')\} = 1$$

oder: $$m^2 \{x''^2 + y''^2 + z''^2 - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2\} = 1.$$

Das zweite Glied des Factors von m^2 verschwindet und man hat

$$m^2 = r^2, \quad m = \pm r = \pm \frac{1}{\delta}.$$

Das Vorzeichen bleibt unbestimmt, so lange über die positive Richtung des Lothes keine Angabe gemacht ist. Wählt man das positive Zeichen, so ist also, wenn man die Grössen a, b, c in Form von Determinanten schreibt:

$$a = r \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}, \quad b = r \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}, \quad c = r \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}.$$

§ 12.

Die Differentialquotienten sind hier nach dem Bogen s genommen; soll irgend eine andere unabhängige Veränderliche t eingeführt werden, so lassen sich die entsprechenden Formeln leicht demgemäss abändern, man setzt dann:

$$x' = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}}, \quad y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{ds}{dt}}, \quad z' = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{ds}{dt}},$$

$$x'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right) : \frac{ds}{dt} = \frac{\frac{ds}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3},$$

und entsprechende Formeln für y'' und z''. Aus diesen Formeln ergiebt sich dann:

$$\delta^2 = \frac{1}{r^2} = \frac{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^4},$$

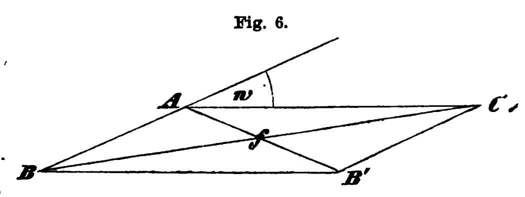
$$x - \xi = \frac{\frac{ds}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{ds}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

und entsprechende Formeln für $y - \eta$ und $z - \zeta$.

§ 13.

Der Krümmungsradius und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes ergeben sich auch durch geometrische Betrachtungen. In sehr einfacher Art z. B. durch die folgenden:

Fig. 6.



Man denke sich drei Punkte im Raume B, A, C, Fig. 6, deren Coordinaten resp. sind xyz, $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$. Man lege durch sie eine Ebene und vervollständige das Parallelogramm, dessen vierte Ecke B' die Coordinaten $x_3y_3z_3$ habe. Alsdann sind die Coordinaten des Mittelpunktes f einerseits (weil $Bf = fC$):

$$\frac{x + x_2}{2}, \quad \frac{y + y_2}{2}, \quad \frac{z + z_2}{2},$$

und andererseits (weil $Af = fB'$)

$$\frac{x_1+x_3}{2}, \quad \frac{y_1+y_3}{2}, \quad \frac{z_1+z_3}{2},$$

es müssen folglich die Gleichungen bestehen

$$x_3 = x - x_1 + x_2, \quad y_3 = y - y_1 + y_2, \quad z_3 = z - z_1 + z_2.$$

Demnach ist die Länge der Linie AB' durch die Gleichung gegeben

$$AB'^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2$$
$$= (x - 2x_1 + x_2)^2 + (y - 2y_1 + y_2)^2 + (z - 2z_1 + z_2)^2,$$

oder nach der gewöhnlichen Bezeichnung

$$AB'^2 = (\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2.$$

Andrerseits ist aber, wenn man den Winkel ABB' mit w bezeichnet:

$$AB'^2 = AB^2 + BB'^2 - 2 \cdot AB \cdot BB' \cos w,$$

oder

$$= (BB' - AB)^2 + BB' \cdot AB \cdot \left(2 \sin \frac{w}{2}\right)^2.$$

Daraus folgt

$$\left(2 \sin \frac{w}{2}\right)^2 = \frac{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2 - (BB' - AB)^2}{BB' \cdot AB}.$$

Will man diese Entwickelung benutzen, um den Krümmungsradius zu finden, so hat man die Punkte A, B, C als unendlich nahe Punkte einer Curve zu bestimmen. $\sphericalangle ABB'$ oder w ist dann der Contingenzwinkel, denn dieser wird von AC und dsr Verlängerung von AB gebildet. Bedeutet ferner ε eine im Vergleich zú AB unendlich kleine Grösse, so wird

$$BB' = AC = AB + \varepsilon,$$

oder, wenn AB zu ds, also ε zu $d^2 s$ wird:

$$BB' \cdot AB = ds(ds + d^2 s)$$

und

$$BB' - AB = ds + \varepsilon - ds = \varepsilon = d^2 s;$$

man erhält also, da ausserdem $r = \frac{ds}{w}$ ist:

$$r = \frac{ds \cdot \sqrt{ds^2}}{\sqrt{(d^2 x)^2 + (d^2 y)^2 + (d^2 z)^2 - (d^2 s)^2}},$$

da $d^2 s$ gegen ds verschwindet und $2 \sin \frac{w}{2}$ in w übergeht. Nimmt man noch s als unabhängige Veränderliche an, so wird wiederum $r = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}$.

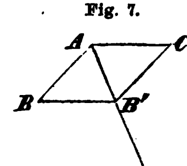


Fig. 7.

Will man nun noch die Richtung von r haben, so nehme man $AB = AC$, Fig. 7, oder s als unabhängige Veränderliche: dann ist diese Richtung des Krümmungsradius die der Halbirungslinie des Winkels BAC. Nennen wir ferner die Länge des

Krümmungsradius wieder r, und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes ξ, η, ζ, so finden wir für diese die Proportionen

$$\frac{\xi - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{r}{AB'} = \frac{\eta - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{\zeta - z_1}{z_3 - z_1},$$

und hieraus

$$\xi - x_1 = \frac{r(x_3 - x_1)}{AB'} = \frac{r \cdot \Delta^2 x}{\sqrt{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2}}.$$

Es ist aber

$$r = \frac{(\Delta s)^2}{\sqrt{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2}},$$

folglich, wenn wir diesen Werth in die letzte Gleichung einsetzen und zu den Grenzen übergehen:

$$\xi - x_1 = x'' \cdot r^2; \quad \text{ebenso } \eta - y_1 = y'' \cdot r^2, \quad \zeta - z_1 = z'' \cdot r^2.$$

§ 14.

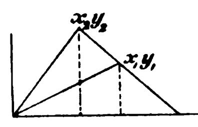
Endlich wollen wir noch folgende Ableitung anführen: Es ist zunächst für die ebenen Curven $r = \frac{ds}{w}$, oder da w unendlich klein ist, $r = \frac{ds}{\sin w} = \frac{ds^3}{ds^2 . \sin w}$. Nun ist aber $ds^2 \cdot \sin w$ der doppelte Inhalt

Fig. 8.

eines gleichschenkligen Dreiecks, Fig. 8, dessen Schenkel ds und dessen Aussenwinkel an der Spitze w ist. Diesen Inhalt findet man andererseits auf folgende Weise:

Den doppelten Flächeninhalt eines beliebigen schiefwinkligen Dreiecks findet man, wenn ein Scheitel der Anfangspunkt der Coordinaten ist und die andern beiden die Coordinaten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ haben: $\pm (x_1 y_2 - y_1 x_2)$, Fig. 9a; also wenn kein Scheitel des Dreiecks im Anfangspunkte liegt, Fig. 9b, sondern die Coordinaten der Scheitel resp. xy, $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ sind:

Fig. 9 a.

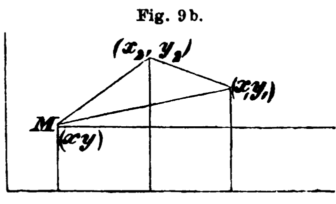


$$\pm \{(x_1 - x) \cdot (y_2 - y) - (x_2 - x) \cdot (y_1 - y)\}$$

oder

$$\pm \{(\Delta x \cdot (\Delta^2 y + 2\Delta y) - (\Delta^2 x + 2\Delta x)\, \Delta y\}$$

Fig. 9b.



oder $\pm \{\Delta x \cdot \Delta^2 y - \Delta y \cdot \Delta^2 x\}$.

Sind die Seiten unendlich klein, und besonders die beiden, welche einen Winkel $(\pi - w)$ bilden, um eine unendlich kleine Grösse einer höhern Ordnung verschieden, so wird der doppelte Inhalt

$$ds^2 \cdot \sin w = dx \cdot d^2 y - dy \cdot d^2 x.$$

Es ist somit für ebene Curven

$$r = \frac{ds^3}{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x},$$

worin x und y als Functionen einer dritten Grösse t angesehen werden.

Dies giebt sofort eine neue Ableitung für den Krümmungsradius im Raume; man braucht eben nur ds^3 zu dividiren durch den doppelten Inhalt des entsprechenden Dreiecks. Diesen findet man, wenn man das Dreieck auf die drei Coordinatenebenen projicirt und die Quadrate der Projectionen addirt:

$$(dx\, d^2y - dy\, d^2x)^2 + (dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2 + (dz\, d^2x - dx\, d^2z)^2,$$

oder wie sich eine solche Summe dreier Quadrate schreiben lässt:

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - (dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z)^2$$

oder
$$ds^2\,(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - (ds\, d^2s)^2.$$

Demnach ist

$$r^2 = \frac{ds^6}{ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - ds^2 d^2s^2}$$

oder
$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}},$$

und wenn man s als unabhängige Veränderliche annimmt:

$$r = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}.$$

§ 15.

Digression auf eine mechanische Aufgabe. Diese Formeln finden Anwendung bei Bestimmung der Centrifugalkraft. Es soll sich ein materieller Punkt so bewegen, dass man sowohl seine Bahn, also die Curve die er beschreibt, als auch zu jeder Zeit den Punkt, wo er sich gerade befindet, kennt, d. h. analytisch ausgedrückt, seine Coordinaten x, y, z sind als Functionen der Zeit t gegeben. Die Principien der Mechanik lehren dann, dass die Kraft, welche die Bewegung bewirkt, zu Componenten nach den drei Axen die Grössen hat $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$, wo m die Masse des Punktes ist. Man kann aber die Kraft statt nach den drei Axen auch auf unzählig viele andere Weisen zerlegen, z. B. nach Tangente und Krümmungsradius der Curve. Denn es ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} \text{ oder } \frac{d\frac{dx}{dt}}{dt} \text{ oder } \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right)}{dt} \text{ gleich } \frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{ds}{dt}.$$

Nun sind aber x', y', z' die Cosinus α, β, γ der Winkel, welche die Tangente mit den drei Axen bildet und x'', y'', z'' sind resp. die Cosinus λ, μ, ν (§ 10) dividirt durch r; es ist also

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m\alpha \frac{d^2 s}{dt^2} + m\lambda \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{r},$$

oder da $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit v bezeichnet $\left(\text{und } \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \text{ ist}\right)$:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m\alpha \frac{d^2 s}{dt^2} + m\lambda \frac{v^2}{r};$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = m\beta \frac{d^2 s}{dt^2} + m\mu \frac{v^2}{r};$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = m\gamma \frac{d^2 s}{dt^3} + m\nu \frac{v^2}{r};$$

d. h. die ganze bewegende Kraft kann man sich zusammengesetzt denken aus zweien, von denen die eine, $m \frac{d^2 s}{dt^2}$ mit den Axen die Richtungscosinus α, β, γ, die andere, $m \frac{v^2}{r}$, die Richtungscosinus λ, μ, ν bildet; oder: Man kann die bewegende Kraft zerlegen in die Tangentialkraft $m \frac{d^2 s}{dt^2}$ und in die (Normal-)Kraft $m \frac{v^2}{r}$, die nach dem Krümmungsradius und zwar vom Curvenpunkte nach dem Krümmungsmittelpunkte zu wirkt. Diese letztere nennt man gewöhnlich Centripetalkraft. Ihre Bestimmung ist für viele mechanische Betrachtungen von Wichtigkeit. Die ihr gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft wird Centrifugalkraft genannt. Dieselbe würde, wenn sie zu der vorhandenen Kraft hinzukäme, bewirken, dass der Punkt seine Bahn nicht weiter verfolgte, sondern sich in der Richtung der augenblicklichen Tangente weiter bewegte. In der That, fügen wir der rechten Seite z. B. der ersten Gleichung das Glied $- m \cos \lambda \frac{v^2}{r}$ hinzu, so haben wir

$$m \frac{d^2 x}{dt} = m\alpha \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{oder da} \quad \frac{dx}{dt} = \alpha \frac{ds}{dt} \quad \text{ist:}$$

$$\frac{m\, d\left(\alpha \frac{ds}{dt}\right)}{dt} = m\alpha \frac{d^2 s}{dt^2},$$

woraus sich α als constant ergiebt, wie denn Gleiches für β und γ gilt.

§ 16.

Das Tangentenproblem, sowie die Theorie der Krümmungsebene und des Krümmungskreises sind jedoch nur besondere Fälle einer allgemeineren Aufgabe. Diese besteht darin, in den Gleichungen einer

Fläche oder einer Curve doppelter Krümmung, welche mehrere willkürliche Constanten enthalten, diese letzteren so zu bestimmen, dass die Fläche oder Curve mit einer gegebenen Curve doppelter Krümmung an einer bestimmten Stelle n auf einander folgende Punkte gemein hat, man sagt dann, dass beide eine Osculation $n - 1^{ter}$ Ordnung haben. Das Problem löst sich in folgender Weise. Finde zunächst die Osculation mit einer Fläche statt. Seien x, y, z die Coordinaten des Punktes, in dem die Osculation stattfindet, so sind die des nächsten Punktes: $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, des folgenden: $x + 2dx + d^2x$, u. s. w. Es müssen also für die Fläche und die gegebene Curve übereinstimmen die Werthe $x, dx, d^2x, \ldots d^{n-1}x$ und ebenso die Werthe für y, z und ihre Differentiale. Es bleibt sich hier gleich, ob y und z als Functionen von x oder alle drei Coordinaten durch eine vierte gegeben sind, im letzteren, dem allgemeineren Falle sind zu identificiren die Werthe von $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \ldots y, \frac{dy}{dt}$ u. s. w. Zieht man diese Werthe aus der Gleichung der gegebenen Curve, so sind, da es sich um ein gegebenes xyz handelt, auch die Differentialquotienten Constanten. Sei nun $f(x, y, z, a, b, c \ldots) = 0$ die Gleichung der Fläche und bildet man $\frac{df}{dt} = 0$, $\frac{d^2f}{dt^2} = 0$ u. s. w., wo x, y, z als Functionen von t gedacht sind, und für $x, \frac{dx}{dt} \cdots$ die oben gefundenen constanten Werthe gesetzt werden, so kann man aus der Gleichung $f = 0$ und ihren $n - 1$ ersten Differentialquotienten n Constanten bestimmen, womit das Problem gelöst ist. Damit also unsere Fläche eine Osculation $n - 1^{ter}$ Ordnung mit der gegebenen Curve haben kann, muss die erstere n Constanten enthalten. In Ausnahmefällen kann sich natürlich aus der Form der Flächengleichung eine Unmöglichkeit zur Bestimmung der Constanten ergeben, wo dann das Problem nicht zu lösen ist. Ist statt der Gleichung der Fläche die einer Curve, also noch eine zweite Gleichung $\varphi(x, y, z, a, b, c) = 0$ gegeben, so finden noch die Gleichungen $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$ u. s. w. statt; damit also zwischen beiden Curven eine Osculation $n - 1^{ter}$ Ordnung stattfinde, müssen die Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ zusammen $2n$ Constanten enthalten.

Als erstes Beispiel nehmen wir das Tangentenproblem. Die Gleichungen einer Geraden $\eta = a\xi + b$, $\zeta = c\xi + d$ sind so zu bestimmen, dass eine Osculation 1ter Ordnung mit einer gegebenen Curve im Punkte xyz stattfinde. Es ist nämlich $2n = 4$, also $n - 1 = 1$. Man hat nun für den Berührungspunkt:

$$y = ax + b, \quad z = cx + d, \quad \frac{dy}{dx} = a, \quad \frac{dz}{dx} = c,$$

also $$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{dz}{dx}(\xi - x),$$

welches die Gleichungen der Tangente sind.

Als zweites Beispiel dient die Krümmungsebene, deren Gleichung sei: $a\xi + b\eta + c\zeta = 1$; sie enthält drei Constanten, es kann also eine Osculation 2ter Ordnung stattfinden. Man hat: $ax + by + cz = 1$ und wenn man den Bogen s als unabhängige Variable betrachtet und mit $x'\,y'\,z'\,x''\,y''\,z''$ die Differentialquotienten nach s bezeichnet:

$$ax' + by' + cz' = 0, \quad ax'' + by'' + cz'' = 0,$$

woraus sich die oben gefundene Gleichung für die Krümmungsebene leicht ergiebt.

Um drittens die Gleichungen des Krümmungskreises zu finden, fügen wir zu der Gleichung der Krümmungsebene noch die einer Kugel hinzu, deren Mittelpunkt die Coordinaten x_1, y_1, z_1 habe und in der Krümmungsebene liegt, es ist dann:

$$(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 + (\zeta - z_1)^2 = r^2 \quad \text{und} \quad ax_1 + by_1 + cz_1 = 1,$$

ferner: $$(x - x_1)x' + (y - y_1)y' + (z - z_1)z' = 0,$$
$$(x - x_1)x'' + (y - y_1)y'' + (z - z_1)z'' = -1,$$

aus welchen Gleichungen sich wieder die oben gegebenen Formeln finden lassen.

§ 17.

Als viertes Beispiel wählen wir noch folgende Aufgabe. Es soll die Kugel bestimmt werden, welche durch vier einander unendlich nahe Punkte einer Curve doppelter Krümmung geht. Diese Kugel heisst Schmiegungskugel.

Bezeichnen ξ, η, ζ die Coordinaten des Mittelpunktes und ϱ den Radius der Kugel, so ergeben sich nach § 16 zur Bestimmung dieser vier Grössen folgende Gleichungen:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \varrho^2, \quad (\xi - x)x' + (\eta - y)y' + (\zeta - z)z' = 0,$$
$$(\xi - x)x'' + (\eta - y)y'' + (\zeta - z)z'' = 1$$

und $$(\xi - x)x''' + (\eta - y)y''' + (\zeta - z)z''' = 0,$$

wobei in Beziehung auf die Differentialquotienten s als unabhängige Variable gilt. Setzen wir der Kürze halber

$$z'y''' - y'z''' = a, \quad x'z''' - z'x''' = b, \quad y'x''' - x'y''' = c,$$

so ergeben die zweite und vierte dieser Gleichungen:

$$\xi - x : \eta - y : \zeta - z = a : b : c$$

oder $\quad \xi - x = \mu \cdot a, \quad \eta - y = \mu \cdot b, \quad \zeta - z = \mu \cdot c,$

wo μ ein Factor ist, der aus der dritten Gleichung bestimmt wird: $\mu (a \cdot x'' + b \cdot y'' + c \cdot z'') = 1$, oder, wenn:

$$a \cdot x'' + b \cdot y'' + c \cdot z'' = \begin{vmatrix} x'' & x''' & x' \\ y'' & y''' & y' \\ z'' & z''' & z' \end{vmatrix} = \varDelta \text{ gesetzt wird: } \mu = \frac{1}{\varDelta}.$$

Danach wird $\xi - x = \frac{a}{\varDelta}, \ \eta - y = \frac{b}{\varDelta}, \ \zeta - z = \frac{c}{\varDelta}.$

Jetzt findet man aus der ersten Gleichung $\varrho^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\varDelta^2}.$

Es ist aber

$$a^2 + b^2 + c^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)(x'''^2 + y'''^2 + z'''^2) - (x'x''' + y'y''' + z'z''')^2.$$

Wir haben nun die Gleichungen: $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, und daraus folgend:

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0 \text{ und } x'x''' + y'y''' + z'z''' = -(x''^2 + y''^2 + z''^2).$$

Folglich wird

$$a^2 + b^2 + c^2 = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 - (x''^2 + y''^2 + z''^2)^2.$$

Setzen wir für a, b, c ihre Werthe, so ergiebt sich:

$$\varDelta (\xi - x) = z'y''' - y'z''', \quad \varDelta (\eta - y) = x'z''' - z'x''',$$
$$\varDelta (\zeta - z) = y'x''' - x'y''',$$
$$\varrho = \frac{1}{\varDelta} \sqrt{x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 - (x''^2 + y''^2 + z''^2)^2},$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

§ 18.

Die zweite Krümmung. Sind wieder a, b, c die Cosinus der Winkel des Lothes auf die Krümmungsebene mit den Axen, ε die 2te Krümmung, so kann man in Gleichung 5) des § 3, $\vartheta, \alpha \beta \gamma$ mit εds, abc vertauschen, also:

$$\varepsilon^2 ds^2 = da^2 + db^2 + dc^2 \text{ oder } \varepsilon^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2,$$

wenn a', b', c' die nach s genommenen Differentialquotienten von a, b, c sind.

Die Grössen a, b, c sind § 11 bestimmt, aus ihnen ergeben sich a', b', c'. Indess fordert folgende Methode weniger Rechnung. Nach § 10 war:

1) $\quad ax' + by' + cz' = 0, \qquad$ 1a) $\quad ax'' + by'' + cz'' = 0,$

differentiirt man die erste Gleichung und zieht die andere ab, so ist also:

2) $$a'x' + b'y' + c'z' = 0,$$

ausserdem hat man:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

3) $x''x' + y''y' + z''z' = 0$ und 4) $aa' + bb' + cc' = 0$.

Wir multipliciren die Gleichungen 1) 2) 3) bezüglich mit p, 1, $-q$, Grössen die wir bestimmen, indem wir die Coefficienten von x', y' gleich Null setzen, wo dann auch der Coefficient von z' verschwindet, also: $pa + a' = qx'', \quad pb + b' = qy'', \quad pc + c' = qz''$,
und wenn wir diese Gleichungen bezüglich mit a, b, c multipliciren und addiren, wegen 1a) und 4): $p = 0$, also:

$$a' = qx'', \quad b' = qy'', \quad c' = qz''.$$

Diese Gleichungen ins Quadrat erhoben und addirt geben:

5) $$\varepsilon^2 = \frac{q^2}{r^2} \text{ (vergl. § 10).}$$

Multiplicirt man sie aber mit x'', y'', z'' und addirt, so erhält man:

$$a'x'' + b'y'' + c'z'' = \frac{q}{r^2};$$

wegen Gleichung 1a) lässt sich diese Gleichung auch schreiben:

$$ax''' + by''' + cz''' = -\frac{q}{r^2}.$$

Setzt man hier für a, b, c die Werthe aus § 11, so hat man für die linke Seite offenbar den Ausdruck: $r\Delta$, wo unter Δ die Determinante

$$\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}$$ zu verstehen ist, also: $q = -r^3\Delta$,

also: $a' = -r^3\Delta x'', \quad b' = -r^3\Delta y'', \quad c' = -r^3\Delta z''.$

Die zweite Krümmung ε aber wird wegen Gleichung 5) $\varepsilon = \pm r^2\Delta$. Das Vorzeichen bestimmt sich danach, in welcher Richtung der Winkel der Krümmungsebene mit einer festen Ebene als positiv angenommen wird, dieser Winkel also bei Aenderung der ersteren zu- oder abnimmt.

§ 19.

An die Theorie der Krümmungen sollen hier noch einige Betrachtungen angeknüpft werden.

A) Wenn die erste Krümmung δ verschwindet, so wird die Curve eine Gerade.

Geometrisch leuchtet dieser Satz ein. Ein analytischer Beweis ergiebt sich folgendermassen:

$\delta = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$ war der Werth der ersten Krümmung. Sie kann nur verschwinden, wenn $x'' = y'' = z'' = 0$ ist. Diese Gleichungen kann man sofort integriren:

$$x' = c, \quad y' = c_1, \quad z' = c_2,$$

wobei die sonst willkürlichen Constanten c, c_1, c_2 nur der Gleichung

$$c^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1$$

unterworfen sind. Die letzten drei Gleichungen integrirt geben wiederum

$$x = cs + d, \quad y = c_1 s + d_1, \quad z = c_2 s + d_2,$$

oder in folgender Form geschrieben:

$$\frac{x-d}{c} = \frac{y-d_1}{c_1} = \frac{z-d_2}{c_2}.$$

Dies sind aber die Gleichungen einer Geraden.

B) Verschwindet die zweite Krümmung, so ist die Curve eine ebene. Auch dies ist geometrisch klar. Analytisch stellt sich die Sache so: Es war § 18 $\varepsilon = \pm r^2 \varDelta$. Dies verschwindet, wenn $r = 0$, was nur möglich ist, wenn die Curve sich in einen Punkt zusammenzieht, oder wenn $\varDelta = 0$ wird. Nun war § 18

$$a' = qx'' = -r^3 \varDelta x'', \quad \text{oder} \quad \varDelta = -\frac{a'}{r^3 x''}.$$

Für $\varDelta = 0$ wäre also: entweder $r = \infty$, d. h. die Curve eine gerade Linie, oder $a' = 0$, also a constant. In derselben Weise zeigt sich dann, dass auch b und c constant sind, also alle Krümmungskreise zusammenfallen, die Curve also eben ist.

§ 20.

Zwei aufeinander folgende Normalebenen schneiden sich in einer Geraden, welche Krümmungsaxe genannt wird.

Wenn man in der Gleichung einer Normalebene die Grössen x, y, z durch $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $\frac{dx}{dt}$ durch $\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt}$ u. s. w. ersetzt, so hat man die Gleichung der nächsten Normalebene. Es gilt also für den Durchschnitt beider die Gleichung der Normalebene:

$$\frac{dx}{dt}(\xi - x) + \frac{dy}{dt}(\eta - y) + \frac{dz}{dt}(\zeta - z) = 0.$$

Und ihr Differentialquotient nach:

$$\frac{d^2x}{dt^2}(\xi - x) + \frac{d^2y}{dt^2}(\zeta - z) + \frac{d^2z}{dt^2}(\zeta - z) - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0.$$

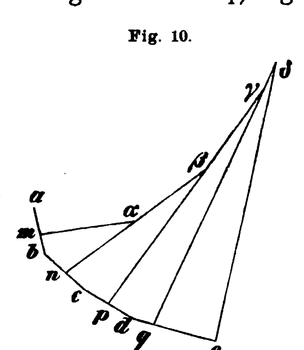
Beide Gleichungen ergeben dann die Krümmungsaxe.

§ 21.

Wenn wir auch die Ausdrücke zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes bei Curven doppelter Krümmung ganz analog denen bei ebenen Curven hergeleitet haben, so besteht doch zwischen den Eigenschaften der Krümmungsmittelpunkte bei diesen Arten von Curven ein wesentlicher Unterschied.

Ist nämlich C irgend eine, ebene oder doppelt gekrümmte, gegebene Curve, dann bilden die Krümmungsmittelpunkte, die zu dieser Curve gehören, einen stetigen Zug, eine zweite Curve C_1. In der Ebene findet nun die merkwürdige Relation statt, dass jede Tangente von C_1, Fig. 10, Normale im entsprechenden Punkte von C ist: dies ist von selbst klar. Sind nämlich ab, bc, cd, de vier auf einander folgende Elemente der Curve C, und $m\alpha$, $n\beta$, $p\gamma$, $q\delta$ die zugehörigen Normalen (die man sich in den Mitten jener vier als geradlinig angesehenen Elemente errichtet denken kann), so sind die Durchschnittspunkte je zweier auf einander folgenden Normalen, nämlich α, β, γ Punkte der zugehörigen Curve C_1, denn sie sind die Krümmungsmittelpunkte für jene Elemente von C. Mithin sind $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ Elemente von C_1, und diese geraden Linien geben zugleich die Richtungen der zugehörigen Tangenten von C_1 an. Es ist also $\alpha\beta$ Tangente von C_1, zugleich ist es aber der Construction nach Normale an C. Und so die übrigen. (Statt der geradlinigen Elemente ab, bc, cd, de u. s. w. kann man sich, für unser Capitel noch angemessener, Kreisbögen denken; d. h. man kann jede Curve in der Ebene C ansehen als zusammengesetzt aus einer unendlichen Anzahl unendlich kleiner Kreisbögen, die alle zu andern Radien und andern Mittelpunkten gehören, und diese Centren sind keine andern Punkte als die Punkte der Linie C_1, welche man bekanntlich die Abgewickelte oder Evolute der Curve C nennt.)

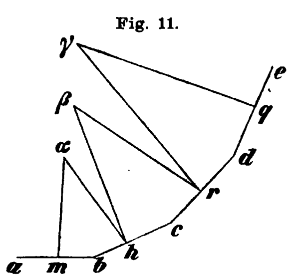
Fig. 10.



Im Raume fehlen gewisse von diesen Eigenschaften. Sind ab, bc, cd, de, Fig. 11, aufeinander folgende Elemente einer Curve doppelter Krümmung, liegen also von ihnen nur je zwei anstossende in einer Ebene, so lege man, um den Krümmungsmittelpunkt für den Kreis, der durch a, b, c geht, zu finden, durch diese drei Punkte eine Ebene, und errichte in ihr auf den Linien ab und bc in ihren Mitten die Normalen, deren Schnittpunkt α der gesuchte Punkt ist. Ebenso

findet man β als Krümmungsmittelpunkt für den Kreis, der durch b, c, d geht, und γ für den Kreis, der durch c, d, e geht u. s. w. $h\alpha$, welches den Mittelpunkt α enthält, liegt also in der Ebene abc, dagegen $h\beta$ mit dem zweiten Mittelpunkte β in einer andern Ebene bcd; und zwar ist der Neigungswinkel $\alpha h\beta$ der der beiden andern Ebenen abc und bcd, denn $h\alpha$ und $h\beta$ sind in einem Punkte h des gemeinschaftlichen Durchschnitts bc beider Ebenen in beiden Ebenen normal errichtet. Die Ebene der beiden Normalen $h\alpha$ und $h\beta$ ist zugleich die zum Element bc gehörige Normalebene, denn sie enthält zwei, folglich alle Normalen von bc. Die Linie $\alpha\beta$ liegt also zwar in der Normalebene von bc, trifft aber dieses Element nicht. α und β sind aber zwei Punkte von C_1, und es folgt daher, dass bei Curven doppelter Krümmung eine Tangente an C_1 nicht Normale an C ist, denn sie trifft diese Curve nicht. Die Curve der Krümmungsmittelpunkte giebt also nicht, wie es bei ebenen Curven geschieht, durch Abwickeln die ursprüngliche Curve, sie fällt also nicht mit der Evolute derselben zusammen.

Fig. 11.



Zusatz. Der analytische Beweis dieser Behauptung ist länger und erfordert viel Rechnung. Ist xyz ein gegebener Punkt der Curve C und abc der entsprechende Krümmungsmittelpunkt, dann bestehen die drei Gleichungen

$$a = x + r^2 \cdot x'', \quad b = y + r^2 \cdot y'', \quad c = z + r^2 \cdot z''.$$

ds ist das Bogenelement der Curve C. Hat man nun xyz und folglich auch r als Functionen von s gegeben, so sind auch abc hierdurch als Functionen von s aufgefasst. Bezeichnet man folglich die laufenden Coordinaten der Tangente an C_1 mit ξ, η, ζ, so sind ihre Gleichungen (nach § 8)

$$\frac{\xi - a}{\frac{da}{ds}} = \frac{\eta - b}{\frac{db}{ds}} = \frac{\zeta - c}{\frac{dc}{ds}}.$$

Setzt man nun in dieser Doppelgleichung für ξ, η, ζ die Coordinaten x, y, z des Punktes der Curve C ein, so wird die resultirende Gleichung

$$\frac{x - a}{\frac{da}{ds}} = \frac{y - b}{\frac{db}{ds}} = \frac{z - c}{\frac{dc}{ds}} \quad \text{falsch.}$$

Anmerkung. Obgleich also im Raume diese Curve C_1 nicht die Evolute C ist, so existiren dennoch auch für solche Curven Evoluten; man kann aus der Curve C andere Curven finden, durch deren Ab-

wickelung C entsteht, ja es hat sogar jede Curve (auch die ebene) unzählig viele Evoluten, nur ist für die Curven von doppelter Krümmung die Curve der Krümmungsmittelpunkte nicht unter diesen Evoluten enthalten. Diese Entwickelung hängt indess von einem Punkte aus der Theorie der sogenannten abwickelbaren Flächen ab, zu der wir erst später kommen.

Zweiter Abschnitt.

Flächen und Curven auf den Flächen.

Analytischer Ausdruck der Flächen.

§ 22.

Auch hier beschäftigen wir uns zunächst mit der Bestimmung der Gleichung einer Fläche, das weiter ausführend, was wir bereits in § 4 angedeutet haben. Es giebt im Wesentlichen drei verschiedene Weisen eine Fläche analytisch darzustellen.

Man giebt entweder eine Coordinate als Function der beiden andern: $z = \varphi(x, y)$. Oder man giebt zweitens überhaupt nur eine Gleichung zwischen x, y, z in dieser Form: $F(x, y, z) = 0$; dies zweite ist das gewöhnlichere, und es ist passend, alle Formeln so einzurichten, dass auf diese Form der Gleichung der Fläche Rücksicht genommen wird. Die erste Darstellungsart ist zwar ebenso allgemein, setzt aber voraus, dass man z aus der zweiten Gleichung explicite dargestellt habe, was die Auflösung beliebiger algebraischer oder transcendenter Gleichungen voraussetzt. Die dritte Form endlich, die von der grössten Wichtigkeit ist, ist folgende: Man denkt sich x, y, z als Function zweier neuer Variabeln

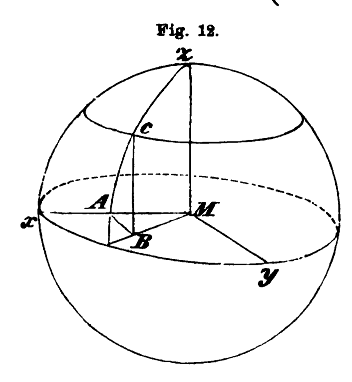
$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v).$$

Mit dieser letzten Form des Ausdrucks hängen die beiden ersten auf eine leicht kenntliche Weise zusammen. Eliminirt man nämlich aus den drei Gleichungen der letzten Form die beiden Variabeln u und v, so erhält man die zweite; und die erste ist selbst nur ein specieller Fall der dritten, denn man kann sie in folgende Gestalt bringen: $x = u, \; y = v, \; z = \varphi(u, v)$.

Ein Beispiel zu der dritten Art der Darstellung bietet die Kugel,

Fig. 12. Identificiren wir dieselbe mit der Erde, so können wir die Ebene xy als Aequator betrachten, und die positive x-Axe durch den ersten Meridian (Null Grad) hindurch gehen lassen. Denken wir uns alsdann jeden Punkt auf der Kugel bestimmt durch seine geographische Länge u und seine geographische Breite v, so ist bekanntlich, wenn wir durch den fraglichen Punkt C und die z-Axe einen grössten Kreis gelegt denken, das Stück dieses Meridians von C bis zum Aequator $= v$ und das Stück des Aequators von da bis zum Null-Meridian $= u$. Wir haben also in diesem Falle sphärische Coordinaten u und v. Construirt man sich die orthogonalen, so ist offenbar $z = a \sin v$, wenn a der Kugelradius ist, und da die Projection des hier in Betracht kommenden Kugelradius auf die Ebene der xy, nämlich $a \cos v$, mit der x-Axe den Winkel u bildet, so ist zweitens $x = a \cos v \cdot \cos u$ und drittens $y = a \cos v \cdot \sin u$. — Für die unabhängigen Variabeln v und u besteht hier blos die Bedingung, dass die geographische Länge u von 0^0 bis 360^0 alle Werthe durchlaufen kann, während die geographische Breite v nur die Werthe von -90^0 (durch 0^0) bis $+90^0$ annehmen kann, indem man die südliche Breite negativ rechnet; durch diese Bestimmung bezweckt man, dass alle Punkte der Kugel in den Gleichungen enthalten seien, und zwar alle nur eindeutig.

Fig. 12.



Man sieht leicht, wie man aus dieser Form der Gleichung der Kugel die zweite erhalten kann: Quadrirt und addirt man die Gleichungen, die für die drei orthogonalen Coordinaten x, y, z bestehen, so werden u und v eliminirt, und man erhält die bekannte Gleichung der Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Hätte man die Gleichung eines dreiaxigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

in der dritten Form darzustellen, so könnte man z. B. setzen:

$$x = a \cos u \cos v, \quad y = b \sin u \cos v, \quad z = c \sin v.$$

§ 23.

Die dritte Form des analytischen Ausdrucks der Fläche hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Betrachtet man nämlich die Fläche gegeben durch das System der drei Gleichungen

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v),$$

so findet man für jedes Werthepaar, welches man den unabhängigen Veränderlichen u und v beilegt, und wenn man x, y, z aus ihren Gleichungen berechnet, einen bestimmten Punkt der Fläche. Legt man aber dem v einen numerischen Werth bei und lässt ihn für alle Werthe, die man u giebt, constant, so wird dadurch das System der gegebenen drei Gleichungen in ein System dreier Gleichungen verwandelt, die nicht mehr zwei Unabhängige enthalten, sondern eine: ein solches System ist aber (§ 3) der analytische Ausdruck einer Curve im Raume, welche auf der Fläche liegt. Die Gleichung $v = c$, zu den obigen drei hinzugefügt, drückt also eine gewisse Curve auf der Fläche aus. Nehmen wir aber an, dass sich v continuirlich ändert, so bekommt man für jeden Werth desselben eine solche Curve auf der Fläche, der Inbegriff aller Werthe von v bedingt also ein System von Curven, von denen eine jede ganz auf der Fläche liegt, und welche die ganze Fläche überziehen. Eine solche Grösse v, welche für eine Curve oder Fläche constant ist, durch ihre Aenderung aber die Aenderung der Linie oder Fläche bedingt, wird bekanntlich Parameter genannt.

Legt man ebenso dem u einen constanten Werth bei, dass also nur v variabel bleibt, so bekommt man ebenfalls eine Curve auf der Fläche, und lässt man u Parameter sein, so ergiebt der Inbegriff aller Werthe desselben alle Curven, welche dieser ersten analog sind.

Hieraus schliessen wir: Die dritte, d. h. diejenige Darstellungsart einer Fläche, nach welcher man ihre Coordinaten als Functionen zweier neuen unabhängigen Variabeln bestimmt, besteht darin, dass man sich die ganze Fläche durch zwei Systeme von Curven überzogen denkt. Das eine System entspricht der Gleichung $u = c$, das andere System entspricht der Gleichung $v = c_1$. Jeder Punkt der Fläche wird alsdann betrachtet als gegeben als Durchschnittspunkt einer Curve des einen Systems und einer Curve des andern Systems.

Wenden wir dies auf das oben gewählte Beispiel der Kugel an, so finden wir zunächst, dass alle Punkte, für welche u einen constanten Werth hat, auf demselben Meridian liegen, oder dass die Gleichung $u = c$ auf der Kugel einen Meridian ausdrückt. Ebenso sieht man, dass die Gleichung $v = c_1$ einen Parallelkreis bedeutet. Will man also nach der oben gewählten Methode einen Punkt der Kugel angeben, so giebt man sein u und sein v, und damit resp. seinen Meridian und seinen Parallelkreis. Als den Durchschnitt

dieser beiden für jeden Punkt (unter der Bedingung der in § 22 angegebenen Einschränkung für u und v) bestimmten Kreise sieht man den Punkt an; d. h. man betrachtet ihn als Durchschnitt zweier Curven, von welchen die eine zu dem Systeme gehört, dessen Gleichung ist $u =$ constans, und die andere zu dem Systeme, dessen Gleichung ist $v =$ constans.

§ 24.

Anmerkung. Etwas Aehnliches ist schon die Coordinatenmethode in der Ebene. Mit dem Ausdrucke: Einführung rechtwinkliger Coordinaten will man bezeichnen, dass man sich die ganze Ebene mit zwei auf einander normalen Systemen paralleler Linien überzogen denkt, und jeden Punkt als Durchschnitt einer Geraden des einen Systems in eine des andern Systems giebt. Aehnlich ist es bei schiefwinkligen und Polarcoordinaten, nur dass bei den erstern die beiden Systeme gerader Linien unter irgend einem schiefen Winkel gegen einander geneigt sind, und bei den andern nur das eine System geradlinig, nämlich ein ebenes Strahlenbüschel mit dem Anfangspunkte der Polarcoordinaten als Mittelpunkt, das andere dagegen eine Schaar concentrischer Kreise ist.

Ja selbst die erste analytische Art, eine Fläche darzustellen, hat ganz die analoge Bedeutung, was schon daraus hervorgeht, dass sie nur ein specieller Fall der dritten ist. Schreibt man nämlich die Gleichung $z = \varphi(x, y)$ so: $x = u$, $y = v$, $z = \varphi(u, v)$, so giebt die erste Gleichung $x = u$ eine ebene Curve parallel der Ebene der yz, und alle diejenigen Punkte, für welche $y = v$ ist, liegen in einer ebenen Curve, die parallel der xz-Ebene ist. Die erste Darstellungsart der Flächen bedeutet also, dass man sich die Fläche überzieht mit solchen ebenen Curven, die entweder der xz-Ebene oder der yz-Ebene parallel sind, und die Punkte der Fläche giebt als Durchschnitte je zweier Curven dieser Systeme.

§ 25.

Lehrsatz. Jede Gleichung zwischen den beiden unabhängigen Variabeln u und v der drei Gleichungen einer Fläche giebt eine Curve auf der Fläche.

Denn fügt man zu den drei Gleichungen

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v)$$

noch eine Gleichung $\Theta(u, v) = 0$, so kann man offenbar mittelst derselben eine der beiden Unabhängigen u oder v aus den ersten drei

eliminiren, so dass drei Gleichungen übrig bleiben, welche nur eine Unabhängige enthalten, und dies ist der analytische Ausdruck einer Curve im Raume, und zwar einer Curve, die auf der gegebenen Fläche liegt, weil alle ihre Punkte den Gleichungen der Fläche genügen.

Bei dem Beispiele der Schraubenlinie hatten wir etwas Aehnliches, indem wir sie definirten als auf der Schraubenfläche liegend (§ 4). Für unser letztes Beispiel, die Kugel, ergiebt sich, dass man eine Curve auf derselben offenbar am einfachsten darstellen wird, indem man ein Mittel angiebt, um aus der geographischen Länge eines Punktes dieser Curve die geographische Breite und umgekehrt zu finden. In diesem Beispiele bezeichnet also jede Gleichung zwischen u und v eine sphärische Curve.

Die Gleichung der Fläche sei gegeben in der Form 2) oder 1) (§ 22).

Untersuchung der Flächen mittelst schneidender Ebenen.

§ 26.

Zunächst wollen wir der Gleichung einer Fläche die Form $F(x, y, z) = 0$ geben, wo x, y, z rechtwinklige Coordinaten sind.

Ein Hauptmittel, um die Gestalt einer Fläche kennen zu lernen, besteht darin, dass man ebene Schnitte legt und diese untersucht. Von allen diesen ebenen Schnitten sind diejenigen am leichtesten zu discutiren und zu berechnen, welche in den drei Coordinatenebenen liegen. Will man nämlich den Schnitt einer Fläche mit der xy-Ebene untersuchen, so hat man nur in der Gleichung der Fläche $z = 0$ zu setzen: dadurch erhält man unmittelbar die Curve, in welcher die Fläche die xy-Ebene schneidet; und ebenso ist es mit den beiden anderen Coordinatenebenen. Hat man dagegen nicht gerade den Schnitt einer Coordinatenebene, sondern irgend einer andern Ebene zu discutiren, so wird es am einfachsten sein, diese andere Ebene zu einer der Coordinatenebenen zu machen. Dies giebt zwar mitunter einige Rechnungslängen, aber keine Rechnungsschwierigkeiten.

Selbstverständlich findet hier eine der beiden Methoden der Coordinatenverwandlung Anwendung, die in den §§ 5, 6, 7 gegeben sind.

Mit Hilfe dieser Coordinatentransformation wollen wir jetzt die Frage beantworten: Kann man durch einen beliebigen Punkt einer Fläche zweiten Grades einen Kreisschnitt legen? Wir wollen uns hier zunächst der Methode des § 5 bedienen, und stellen zu dem Ende die Gleichung der Fläche zweiten Grades so auf, dass der

betrachtete Punkt Anfangspunkt wird. Analytisch stellt sich dies dadurch dar, dass das constante Glied fehlt. Da man ferner jedesmal die Coordinatenaxen so legen kann, dass in der Gleichung der Fläche die Producte je zweier verschiedener Coordinaten fehlen, so können wir als allgemeinste Gleichung der Fläche zweiten Grades, bei der der Anfangspunkt der gegebene Punkt ist, folgende aufstellen:

I) $$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dx' + 2Ey' + 2Fz' = 0.$$

Dies ist nämlich diejenige Form der Gleichung, welche die Fläche annimmt, wenn die Coordinatenaxen den Hauptaxen parallel angenommen werden. Führt man nun ein neues Coordinatensystem ein und zwar durch folgende Transformationen:

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \quad z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z,$$

so haben wir nach gemachter Substitution in die in diesem Systeme ausgedrückte Gleichung der Fläche die Bedingung einzuführen, dass die Fläche von einer der neuen Coordinatenebenen, z. B. von der der xy, in dem gesuchten Schnitte getroffen werde, d. h. wir haben $z = 0$ zu setzen. Dann ist:

$$x' = \alpha x + \beta y, \quad y' = \alpha' x + \beta' y, \quad z' = \alpha'' x + \beta'' y.$$

Wegen des in § 5 gefundenen Werthes von z ist die Gleichung $z = 0$ gleichbedeutend mit:

II) $$\gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z' = 0.$$

Setzen wir nun die Werthe von x', y', z' in die Gleichung der Fläche ein, so erhalten wir:

III) $$x^2\{A\alpha^2 + B\alpha'^2 + C\alpha''^2\} + 2xy\{A\alpha\beta + B\alpha'\beta' + C\alpha''\beta''\}$$
$$+ y^2\{A\beta^2 + B\beta'^2 + C\beta''^2\} + 2x\{D\alpha + E\alpha' + F\alpha''\}$$
$$+ 2y\{D\beta + E\beta' + F\beta''\} = 0.$$

Diese Gleichung giebt also den Durchschnitt der Ebene

$$\gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z' = 0$$

mit der gegebenen Fläche zweiten Grades. Damit die dadurch ausgedrückte Curve ein Kreis sei, muss zunächst der Coefficient des zweiten Gliedes Null, und ferner die Coefficienten, welche die Quadrate der Coordinaten multipliciren, einander gleich sein. Nennen wir den Werth dieser beiden letzteren Coefficienten f, so haben wir folgende drei Gleichungen:

1) $A\alpha\beta + B\alpha'\beta' + C\alpha''\beta'' = 0,$ 2) $A\alpha^2 + B\alpha'^2 + C\alpha''^2 = f,$

3) $$A\beta^2 + B\beta'^2 + C\beta''^2 = f.$$

Bis hierher ist die Untersuchung ganz allgemein. Wir wollen aber von jetzt an den Fall ausschliessen, dass von den drei Coeffi-

cienten A, B, C irgend zwei einander gleich sind. Dann ist nämlich die Fläche eine Umdrehungsfläche, und bei dieser sind alle Schnitte normal zur Axe, und nur diese Kreise. Den Fall jedoch, dass eine der drei Grössen A, B, C Null ist, d. h. die beiden Paraboloide, sowie den elliptischen und den hyperbolischen Cylinder, schliessen wir nicht aus, wohl aber den parabolischen, sowie das parabolische Paraboloid, denn bei diesem sind zwei Coefficienten Null, und wir haben soeben festgesetzt, dass nicht zwei denselben Werth haben sollen.

Setzen wir noch über das (bis jetzt ganz willkürlich gelassene) Grössenverhältniss der Coefficienten A, B, C fest, dass

$$A > B > C,$$

dass also die Differenzen $A - B$, $B - C$ positiv sind, so fragt es sich jetzt: Lassen sich die Gleichungen 1), 2), 3) für alle Coefficienten A, B, C, welche nur den soeben gemachten Bedingungen genügen, lösen, und wie lauten die daraus hervorgehenden Werthe von $\gamma, \gamma' \gamma''$? Denn dass die Gleichungen die Grössen $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ und nicht die gesuchten $\gamma, \gamma', \gamma''$ enthalten, macht keinen Unterschied, da wir Relationen genug haben, um jene auf diese zu reduciren. Wir formen nun die Gleichungen 1), 2), 3) so um, dass sie nur drei Grössen $\gamma, \gamma', \gamma''$ (und ausserdem f) enthalten.

Addirt man die beiden letzten, und berücksichtigt die Gleichungen 1), 2), 3) des § 5, so findet man:

$$A(1 - \gamma^2) + B(1 - \gamma'^2) + C(1 - \gamma''^2) = 2f,$$

oder

$$4) \qquad A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2 = A + B + C - 2f.$$

Multiplicirt man die beiden letzten und subtrahirt von ihrem Producte das Quadrat der ersten, so ergiebt sich:

$$AB(\alpha^2\beta'^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' + \alpha'^2\beta^2) + BC(\alpha'^2\beta''^2 - 2\alpha'\alpha''\beta'\beta'' + \alpha''^2\beta'^2)$$
$$+ CA(\alpha''^2\beta^2 - 2\alpha\alpha''\beta\beta'' + \alpha^2\beta''^2) = f^2,$$

oder

$$AB(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 + BC(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2 + CA(\alpha''\beta - \alpha\beta'')^2 = f^2,$$

oder endlich wegen der Formeln 13), 14), 15), 16) des § 5:

$$5) \qquad BC\gamma^2 + CA\gamma'^2 + AB\gamma''^2 = f^2.$$

Dazu fügen wir noch die Gleichung:

$$6) \qquad \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

Um nun aus diesen Gleichungen 4), 5), 6) zunächst γ zu finden, multiplicire man sie der Reihe nach mit A, 1, $-A(B + C)$ und addire dieselben. Dadurch findet man

$$\{A^2 + BC - A(B + C)\}\gamma^2 = A^2 - 2Af + f^2,$$

oder $$\gamma^2(A-B)(A-C)=(A-f)^2,$$

und analog die beiden andern Coefficienten. Man hat folglich:

$$\gamma^2=\frac{(A-f)^2}{(A-B)(A-C)},\quad \gamma'^2=\frac{(B-f)^2}{(B-C)(B-A)},\quad \gamma''^2=\frac{(C-f)^2}{(C-A)(C-B)}.$$

Diese drei Quadrate können natürlich nur positiven Ausdrücken äquivalent sein. Nach unserer obigen Bedingung $A>B>C$ sind zwar

$$\gamma^2=\frac{(A-f)^2}{(A-B)(A-C)}\quad \text{und}\quad \gamma''^2=\frac{(C-f)^2}{(A-C)(B-C)},$$

nicht aber

$$\gamma'^2=-\frac{(B-f)^2}{(B-C)(A-B)}$$

in dieser Beziehung der Bedingung entsprechend. Der Widerspruch in γ'^2 lässt sich also nur dadurch heben, dass man $\gamma'=0$, also $f=B$ setzt, so dass jetzt die gesuchten Coefficienten werden:

$$\gamma=\pm\sqrt{\frac{A-B}{A-C}},\quad \gamma'=0,\quad \gamma''=\pm\sqrt{\frac{B-C}{A-C}}.$$

Die Ausdrücke rechts sind echte Brüche, es sind also immer die Winkel, deren Cosinus γ und γ'' sind, reelle Grössen. Sie führen also auf zwei verschiedene Ebenen, welche Kreisschnitte liefern. Bezeichnen wir für den Augenblick $\frac{A-B}{A-C}$ mit m^2 und $\frac{B-C}{A-C}$ mit n^2, indem diese Brüche jedenfalls positiv sind, so haben wir zunächst folgende vier Systeme:

$$\gamma=+m,\quad \gamma'=0,\quad \gamma''=+n;\quad \gamma=-m,\quad \gamma'=0,\quad \gamma''=+n$$
$$\gamma=-m,\quad \gamma'=0,\quad \gamma''=-n;\quad \gamma=+m,\quad \gamma'=0,\quad \gamma''=-n.$$

Setzen wir jedoch diese vier Systeme nach einander in die Gleichung der schneidenden Ebene, nämlich in $\gamma x+\gamma' y+\gamma'' z=0$ ein, so bekommen wir offenbar nur zwei verschiedene Ebenen, nämlich entweder $mx+nz=0$ oder $mx-nz=0$. Jede Fläche zweiten Grades also, welche weder eine Umdrehungsfläche noch ein parabolischer Cylinder oder Paraboloid ist, hat die Eigenschaft, dass sich durch jeden ihrer Punkte zwei Ebenen legen lassen, welche die Fläche in Kreisen schneiden; und die Gleichungen dieser schneidenden Ebenen sind, wenn die Gleichung der Fläche die oben aufgestellte Form hat: $\sqrt{A-B}\cdot x\pm\sqrt{B-C}\cdot z=0$. Aus diesen Gleichungen folgt, dass beide schneidenden Ebenen auf der xz-Ebene normal stehen und der y-Axe parallel sind.

Da die drei Grössen A, B, C in Bezug auf die Flächen zweiten Grades mit einem Mittelpunkte die reciproken Werthe der Axenquadrate darstellen (welche auch wie bei den Hyperboloiden negativ

sein können), so kann man, wenn man in einer solchen Fläche zweiten Grades die reciproken Werthe der Axenquadrate bildet (wobei also auch imaginäre sowie unendlich grosse Axen nicht ausgeschlossen sind), diejenige Axe die **mittlere Axe** nennen, welcher die mittlere der drei gebildeten Grössen entspricht, und man kann alsdann unser Resultat so aussprechen:

Durch jeden Punkt einer Fläche zweiten Grades, die nicht zu den oben ausgeschlossenen gehört, gehen zwei Kreisschnitte, die der mittleren Axe parallel sind.

§ 27.

Zusatz 1. Es giebt aber einen Grenzfall, der besonders zu untersuchen ist.

Es ist der Fall, wo die Grösse $f = 0$, d. h. da nach dem Früheren $f = B$ sein soll, der Fall, wo $B = 0$ ist Alsdann muss C negativ sein, denn wir haben vorausgesetzt $B > C$. Setzen wir also $A = +\lambda^2$ und $C = -\mu^2$, so haben wir folgende Gleichung der Fläche

$$\lambda^2 x'^2 - \mu^2 z'^2 + 2Dx' + 2Ey' + 2Fz' = 0,$$

eine Gleichung, welche ein hyperbolisches Paraboloid ausdrückt oder einen hyperbolischen Cylinder: das letztere in dem Falle, wenn $E = 0$ ist. In der Gleichung der Schnittlinie verschwinden dann die Coefficienten von x'^2, y'^2 wie man ersieht, wenn man aus den Gleichungen § 26 I) und II) z nach Einsetzen der Werthe von γ und γ'' eliminirt, und man hat als Durchschnitt eine Gerade. Wir sehen also, dass beim hyperbolischen Paraboloide und beim hyperbolischen Cylinder durch jeden Punkt zwei Ebenen gelegt werden können, von denen eine jede mit der Fläche nur **eine** gerade Linie gemeinschaftlich hat. Dieser Fall ordnet sich dem allgemeinen aber unter, da man eine Gerade als einen Kreis von unendlich grossem Radius ansehen kann.

Beim hyperbolischen Cylinder ist das evident. Da man nämlich durch jeden Punkt einer Hyperbel zwei Linien legen kann, die die Hyperbel nur eben in diesem Punkte treffen, nämlich diejenigen beiden Linien, welche den Asymptoten der Hyperbel parallel sind, so werden die beiden Ebenen, welche man über diesen Linien normal zur Ebene der Hyperbel errichtet, den hyperbolischen Cylinder nur in der Seite schneiden, welche normal über jenem Punkte steht. — Beim Paraboloide ist die geometrische Betrachtung nicht so einfach; aber die Rechnungen, die wir angestellt haben, geben in jedem Falle darüber Bescheid. Es sind nämlich:

$$\gamma^2 = \frac{A}{A - C} \quad \text{und} \quad \gamma' = 0, \quad \gamma''^2 = \frac{-C}{A - C}.$$

Die Gleichung II) des vorigen Paragraphen aber giebt $z'^2 = -\frac{A}{C} x''$. Also wird Gleichung I): $Dx' + Ey' + Fz' = 0$. Diese aber in Verbindung mit II) bestimmt eine gerade Linie.

Man kann also, selbst diese beiden Ausnahmefälle mit hineinziehend, allgemein sagen: Durch jeden Punkt einer Fläche zweiten Grades gehen zwei Kreisschnitte; die Ebenen aller dieser Kreisschnitte liegen in zwei parallelen Systemen. Denn ergiebt sich als Schnitt eine gerade Linie, so kann diese als ein Kreis mit unendlich grossem Radius angesehen werden. Die betreffenden Umdrehungsflächen und die parabolischen Cylinder und Paraboloide sind ausgenommen. Die Umdrehungsflächen sind oben behandelt. Der Fall des parabolischen Cylinders und Paraboloids ist leicht zu erledigen. Setzt man $A = B = 0$, so werden die Gleichungen 1), 2), 3), da C nicht $= 0$ ist: $\alpha'' = 0$, $\beta'' = 0$, $f = 0$, woraus $\gamma''^2 = 1$, also $\gamma = \gamma' = 0$ folgt, es wird also die Gleichung des Durchschnittes $z' = 0$, und dies in die Gleichung der Fläche I) eingesetzt, giebt: $2Dx' + 2Ey' = 0$, was die Gleichung einer Geraden ist.

Zusatz 2. Als specielleres Beispiel wollen wir in Kürze noch das zweischalige Hyperboloid $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$ untersuchen, indem wir durch den Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) desselben Kreisschnitte legen. Wir wählen diesen Punkt zum neuen Anfangspunkte d. h. wir substituiren $\xi - \xi_1 = x$, $\eta - \eta_1 = y$, $\zeta - \zeta_1 = z$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{2\xi_1 x}{a^2} - \frac{2\eta_1 y}{b^2} - \frac{2\zeta_1 z}{c^2} = 0,$$

und haben dadurch die Gleichung auf die Form gebracht, die wir oben in der allgemeinen Entwickelung zu Grunde gelegt haben. Offenbar ist $\frac{1}{a^2}$ der grösste Coefficient, denn die beiden andern sind negativ, und ist $b > c$, so ist $-\frac{1}{b^2} > -\frac{1}{c^2}$, also entsprechen hiernach diese drei Coefficienten geradezu den obigen A, B, C. Die Gleichung

$$\sqrt{A - B} \cdot x \pm \sqrt{B - C} \cdot z = 0$$

wird also

$$cx\sqrt{a^2 + b^2} \pm az\sqrt{b^2 - c^2} = 0$$

oder in den ursprünglichen Coordinaten:

$$c(\xi - \xi_1)\sqrt{a^2 + b^2} \pm a(\zeta - \zeta_1)\sqrt{b^2 - c^2} = 0.$$

Dies sind also die beiden Ebenen, welche durch den Punkt $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ gehen und das Hyperboloid in je einem Kreise schneiden.

§ 28.

Mit Hilfe der Formeln des § 7 lösen sich indess sämmtliche Fälle des Problems in einfacherer Weise.

Seien x, y, z die ursprünglichen Coordinaten, dann ist die Gleichung der Fläche:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz = 0.$$

Es sind bei dieser Form der Gleichung die Coordinatenaxen den Hauptaxen parallel. Ist von den Grössen A, B, C keine gleich Null, so hat man ein Ellipsoid, wenn sie alle gleiches Zeichen haben, eins der Hyperboloide, wenn dies nicht der Fall ist; auch können dann für die absoluten Werthe von A, B, C die umgekehrten Werthe der Quadrate der Halbaxen genommen werden (wobei man bei den Hyperboloiden die sogenannten imaginären Axen in Betracht ziehen muss). Sind zwei der Grössen A, B, C gleich, so hat man die betreffenden Rotationsflächen, ist $A = B = C$, so hat man eine Kugel. Ist eine der Grössen A, B, C gleich Null, so hat man das elliptische, bezüglich hyperbolische Paraboloid, sind zwei gleich Null, so hat man das parabolische Paraboloid. Sind C und F oder B und E gleichzeitig gleich Null, so hat man den elliptischen oder hyperbolischen Cylinder, sind B, C und E oder F gleich Null, so ist der parabolische Cylinder gegeben.

Setzen wir nun für x, y, z ihre Werthe aus § 7 durch x_2, y_2, z_2 ausgedrückt, was voraussetzt, dass die neue Axe x_2 in die Ebene xy fällt, was ja immer geschehen kann. Wir wählen jedoch für x_2, y_2, z_2 die Bezeichnung ξ, η, ζ. Da nun die Schnittebene zugleich die Coordinatenebene $\xi\eta$ sein soll, ist $\zeta = 0$, also nach § 7:

$$\begin{aligned} A(\xi \cos h - \eta \sin h \cos i)^2 &+ B(\xi \sin h + \eta \cos h \cos i)^2 \\ &+ C\eta^2 \sin i^2 + 2D(\xi \cos h - \eta \sin h \cos i) \\ &+ 2E(\xi \sin h + \eta \cos h \cos i) + 2F\eta \sin i = 0; \end{aligned}$$

die Coefficienten von ξ^2, η^2, ξ, η sind dann bezüglich:

$$A' = A \cos h^2 + B \sin h^2, \quad C' = (A \sin h^2 + B \cos h^2) \cos i^2 + C \sin i^2,$$
$$B' = 2 \cos h \sin h \cos i \,(B - A).$$

Wir können nun immer annehmen, dass A positiv und $A > B > C$ ist, den Fall der Gleichheit dieser Grössen nicht ausgeschlossen. Soll nun die Schnittebene ein Kreis sein, so muss $A' = C'$, $B' = 0$ sein. Die erste Bedingung ergiebt:

I) $\quad A \cos h^2 + B \sin h^2 = A \sin h^2 \cos i^2 + B \cos h^2 \cos i^2 + C \sin i^2$

und die zweite

II) $$\sin h \cos h \cos i (A - B) = 0.$$

Die letztere Gleichung wird erfüllt, wenn:

A) $$\cos h = 0 \quad \text{ist.}$$

Dann giebt die erste

$$B = A \cos i^2 + C \sin i^2, \quad \text{und} \quad \cos i^2 = \frac{B - C}{A - C}.$$

Dieser Ausdruck ist ein echter Bruch und positiv, also ist diese Gleichung im allgemeinen Falle zu erfüllen. Es giebt für jeden Punkt O also zwei Kreisschnitte, da $\cos i$ mit doppeltem Vorzeichen genommen werden kann, die Gleichung $\cos h = 0$, $h = 90^0$ zeigt dann, dass diese Kreisschnitte durch die Axe der y gehen, also der mittleren Hauptaxe parallel sind. Ist $B = C$, was beim durch Drehung um die x-Axe entstandenen Rotationsellipsoid oder Hyperboloid stattfindet, so ist auch $i = 90^0$, d. h. die Kreisschnitte sind auf der Rotationsaxe senkrecht. In diesem Falle geht durch jeden Punkt nur ein Kreisschnitt, wie dies geometrisch klar ist. Ist aber $B = C = 0$, also beim parabolischen Paraboloid, so ist $i = 90^0$, es wird dann aber $A' = C' = 0$, und da auch $B' = 0$ ist, wird der betreffende Schnitt eine gerade Linie. Das parabolische Paraboloid hat also keinen Kreisschnitt. Wohl aber ist jeder der yz-Ebene parallele Schnitt eine Gerade. Sind A, B und C gleich, so erhält man eine Kugel; $\cos i$ wird unbestimmt, d. h. jede Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise.

Ist $A = B$, ein Fall, der den Rotationsflächen entspricht, die durch Drehung um die z-Axe entstanden sind, so ist auch $i = 0$, dann ist wieder jeder Schnitt senkrecht auf der Rotationsaxe z ein Kreis.

B) Wird Gleichung II) durch die Bedingung $\sin h = 0$ erfüllt, so giebt Gleichung I):

$$\cos i^2 = \frac{A - C}{B - C},$$

wo der Zähler grösser als der Nenner ist. Es ist also hier nur der Fall möglich, wo $A = B$ ist, ein Fall, den wir ja nicht ausgeschlossen haben, der aber schon oben erörtert wurde.

C) Die Gleichung II) wird aber auch erfüllt, wenn $\cos i = 0$, $i = 90^0$ ist, dann giebt Gleichung I) $\cos h^2 = \frac{C - B}{A - B}$, ein im Allgemeinen negativer Werth, wenn nicht $B = C$, ein Fall, der oben erörtert wurde.

D) Endlich wird Gleichung II) auch erfüllt, wenn $A = B$ ist, ein ebenfalls bereits erörterter Fall.

Es sind also in Fall A) die übrigen enthalten. Zu erörtern ist nur noch der Fall, wo der Kreisschnitt in eine gerade Linie übergeht, was wir in A) nur für den Fall erörtert haben, wo $B = C = 0$, und die Fläche ein parabolisches Paraboloid war. Setzen wir nun allgemein $A' = C' = 0$, wo also immer der Schnitt eine gerade Linie ist, so erhalten wir:

$$(A - B) \cos h^2 = - B,$$
$$(A \sin h^2 + B \cos h^2 - C) \cos i^2 = - C.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit II), wo also entweder

A) $\cos h = 0,$ oder

B) $\sin h = 0,$ oder

C) $\cos i = 0,$ oder

D) $A = B$

sein müsste, ergeben aber Folgendes: Fall A) bedingt, dass $B = 0$, also $\cos i^2 = - \frac{C}{A - C}$ ist. Letzteres ist immer möglich, da C negativ sein muss. Der Fall tritt beim hyperbolischen Paraboloid ein.

Fall B) ergäbe $A = 0$, was ausgeschlossen war, Fall C) gäbe $C = 0$, was positives B) voraussetzte und $\cos h$ imaginär machen würde, wenn nicht $B = 0$ ist, was ein parabolisches Paraboloid ergäbe; endlich würde Fall D) $A = B = 0$ ergeben, was ausgeschlossen ist. Also: der Kreisschnitt wird zur geraden Linie beim parabolischen und hyperbolischen Paraboloid.

§ 29.

Jeder Schnitt einer Ebene mit einer Fläche zweiten Grades giebt eine Curve zweiten Grades. Im vorigen Paragraphen ist der Fall erörtert worden, wenn diese Curve ein Kreis wird. Wenden wir uns jetzt zu der Frage: wann werden aus dieser Curve zwei gerade Linien, die ja ebenfalls eine Curve zweiten Grades bilden? Diese Frage also kommt darauf hinaus: Wann lassen sich durch einen gegebenen Punkt einer Fläche zweiten Grades zwei Gerade legen, die in dieser Fläche enthalten sind?

Wir behalten die Bezeichnungen A', B', C' für die Factoren von ξ^2, ξ, η und η^2 bei und bezeichnen jetzt die Factoren von ξ und η bezüglich mit $2D'$ und $2F'$. Wir haben dann:

$$D' = D \cos h + E \sin h,$$
$$F' = - D \sin h \cos i + E \cos h \cos i + F \sin i.$$

Die linke Seite der Gleichung des gesuchten Querschnitts muss dann aus zwei linearen Factoren bestehen und nach unserer Annahme kein constantes Glied enthalten, also die Form haben:

$$A'(\xi + n\eta)(\xi + py).$$

Es sind also D' und $F' = 0$, hieraus folgt:

$$\operatorname{tg} h = -\frac{D}{E}, \quad \operatorname{tg} i = \frac{D}{F \sin h}.$$

$\sin h$ kann immer als positiv betrachtet werden, da man der Axe der ξ immer eine Lage geben kann, wo ihre positive Richtung in den ersten oder zweiten Quadranten fällt, dann ist wegen des Werthes von $\operatorname{tg} h$ auch das Zeichen von $\cos h$ bestimmt. Man erhält:

$$\sin h = \frac{D}{\sqrt{E^2 + D^2}}, \quad \cos h = \frac{-E}{\sqrt{E^2 + D^2}},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist; ferner ist:

$$\sin i = \frac{\sqrt{E^2 + D^2}}{\sqrt{E^2 + D^2 + F^2}}, \quad \cos i = \frac{F}{\sqrt{E^2 + D^2 + F^2}}.$$

Die Wurzel im Zähler von $\sin i$ ist positiv, die im Nenner unbestimmt, jedoch haben die Nenner von $\sin i$ und $\cos i$ gleiches Vorzeichen.

Ferner ist $B' = A'(p + n)$, $C' = pnA'$, oder, wenn man diese Werthe und die von $\cos h$, $\sin h$, $\cos i$, $\sin i$ in die Formeln für A', B', C' des § 28 setzt:

$$A'(D^2 + E^2) = AE^2 + BD^2,$$

$$A'(p + n)(E^2 + D^2)\sqrt{D^2 + E^2 + F^2} = 2(A - B)DEF,$$

$$A'pn(E^2 + D^2)(D^2 + E^2 + F^2) = F^2(AD^2 + BE^2) + C(D^2 + E^2)^2.$$

Es müssen sich nun, damit diese Aufgabe möglich sei, für A', p und n immer reelle Werthe ergeben.

Für A' ist dies immer der Fall, p und n aber sind die Wurzeln s_1 und s_2 der quadratischen Gleichung:

$$1) \quad s^2 - \frac{2(A - B)DEF \cdot s}{A'(D^2 + E^2)\sqrt{D^2 + E^2 + F^2}} + \frac{F^2(AD^2 + BE^2) + C(D^2 + E^2)^2}{A'(D^2 + E^2)(D^2 + E^2 + F^2)} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind aber reell, wenn das letzte Glied algebraisch genommen kleiner als das Quadrat des halben ersten Gliedes ist, also wenn

$$\frac{F^2(AD^2 + BC^2) + C(D^2 + E^2)^2}{A'} < \frac{(A - B)^2 D^2 E^2 F^2}{A'^2(D^2 + E^2)}$$

oder, wenn man für A' seinen Werth $\frac{AE^2 + BD^2}{D^2 + E^2}$ setzt:

$$\frac{F^2(AD^2 + BE^2) + C(D^2 + E^2)^2}{AE^2 + BD^2} < \frac{(A - B)^2 D^2 E^2 F^2}{(AE^2 + BD^2)^2}.$$

Da wir aber A und B immer als positiv annehmen können, da falls zwei der Grössen A, B, C negativ sind, das Zeichen sämmtlicher Glieder in der Gleichung der Fläche geändert werden kann, so haben wir:

$$(AE^2 + BD^2)(F^2(AD^2 + BE^2) + C(D^2 + E^2)^2) < (A - B)^2 D^2 E^2 F^2.$$

Diese Ungleichheit nimmt dann die einfache Form an:

$$2) \qquad C(AE^2 + BD^2) < -ABF^2,$$

hierin muss C nothwendig negativ sein, es wird also unsere Bedingung für das Ellipsoid unmöglich. Der Fall wo $C(AE^2 + BD^2) = -ABF^2$ und der wo $C = 0$ ist, so wie der, wo bei negativem C die Grösse B verschwindet, müssen aber in Betracht gezogen werden. Es kommt nun darauf an, die beiden Hyperboloide von einander zu unterscheiden. Die Mittelpunktsgleichung für diese ist:

$$Ax^2 + By^2 - C_1 z^2 = \pm 1, \quad C_1 = -C,$$

wo C_1 positiv eben so wie A und B ist; das obere Zeichen gilt für das einschalige, das untere für das zweischalige Hyperboloid. Nun verschieben wir die Coordinatenaxen, ohne ihre Richtung zu verändern, nach einem Punkte in der Fläche selbst, dessen Coordinaten a, b, c sein mögen, d. h. wir vertauschen x, y, z bezüglich mit $x + a$, $y + b$, $z + c$, indem wir die Bezeichnung x, y, z jetzt für die neuen Coordinaten beibehalten. Wir erhalten dann:

$$D = aA, \quad E = bB, \quad F = -cC_1,$$

also:

$$\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{B} - \frac{F^2}{C_1} = \pm 1,$$

$$Ax^2 + By^2 - C_1 z^2 + 2Aax + 2Bby - 2C_1 cz = 0,$$

$$Aa^2 + Bb^2 - C_1 c^2 = \pm 1.$$

Also, indem wir diese Gleichung mit der, von welcher wir in unseren Betrachtungen ausgingen, vergleichen:

$$a = \frac{D}{A}, \quad b = \frac{E}{B}, \quad c = -\frac{F}{C_1} \quad \text{und} \quad \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{B} - \frac{F^2}{C_1} = \pm 1$$

oder

$$F^2 = \frac{C_1}{AB}(BD^2 + AE^2 \mp AB).$$

Nun wird dieser Werth von F^2 in unsere Ungleichheit 2) eingesetzt,

$$-C_1(AE^2 + BD^2)AB < -ABC_1(BD^2 + AE^2 \mp AB),$$

d. h.

$$0 < \pm AB.$$

Dies ist nur möglich, wenn das obere Vorzeichen gilt, d. h. auf dem einschaligen Hyperboloid. Also:

Auf dem Ellipsoid und zweischaligen Hyperboloid giebt es keine geraden Linien, auf dem einschaligen Hyperboloid aber lassen sich durch jeden Punkt zwei Gerade legen.

Für den Kegel zweiten Grades ist die Mittelpunktsgleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0.$$

Hieraus erhält man, wenn wie oben die x-Axen, den alten parallel, durch einen beliebigen Punkt der Fläche gelegt werden:

$$\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{B} + \frac{F^2}{C} = 0, \quad F^2 = -\frac{(AE^2 + BD^2)C}{AB}.$$

Die Bedingung 2) wird dann die Form annehmen:

$$C(AE^2 + BD^2) < C(AE^2 + BD^2).$$

Dies wäre widersinnig, wenn nicht die Gleichheit beider Seiten eingeschlossen wäre, wie wir es vorausgesetzt haben. Die Ungleichheit 2) wird also eine identische Gleichung. Die Gleichheit beider Seiten von 2) hat nun, wie leicht zu erkennen, die Bedeutung, dass die quadratische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat und dieselbe führt also zu den Werthen:

$$n = p \quad \text{oder} \quad A'(\xi + n\eta)^2 = 0,$$

also beim Kegel geht durch einen gegebenen Punkt nur eine Gerade, indem die beiden des allgemeineren Falles sich decken*).

Kehren wir jetzt zur allgemeinen Gleichung, wo F beliebig ist, zurück. Sei $C = 0$, so wird die Bedingung 2) unmöglich, wie dies sein muss, da A und B positiv sind. Man hat dann ein elliptisches Paraboloid, dem also die verlangte Eigenschaft nicht zukommt. Einzige Ausnahme ist der Fall, wo auch $F = 0$ ist, also der elliptische Cylinder, bei demselben aber hat ebenfalls Gleichheit der Grössen p und n statt, also durch jeden Punkt geht nur eine Gerade. Ist aber $B = 0$, also C negativ, so ist die Bedingung 2) stets erfüllt, d. h. das hyperbolische Paraboloid verhält sich wie das einschalige Hyperboloid. Ist auch $E = 0$, so hat man einen hyperbolischen Cylinder. In Gleichung 2) werden dann wieder beide Seiten gleich, und die beiden Geraden fallen wie beim elliptischen Cylinder zusammen. Dasselbe findet auch statt, wenn $B = C = 0$ ist, also beim parabolischen Paraboloid. Gleiches gilt endlich für $B = C = F$, also für den parabolischen Cylinder.

Anmerkung 1. Das einschalige Hyperboloid gehört somit zu denjenigen Flächen, die man sich durch Bewegung einer Geraden

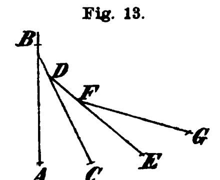
*) Man sieht sofort, dass diese Schlüsse für die Kegelspitze nicht gelten.

entstanden denken kann. Da durch jeden Punkt eines solchen zwei Gerade gehen, welche in die Fläche fallen, so enthält letztere zwei Schaaren gerader Linien, und durch jeden Punkt der Fläche geht je eine der beiden Schaaren.

Nun ist aber eine Gerade völlig bestimmt, wenn sie durch einen Punkt und zwei Linien geht, die nicht in einer Ebene liegen. Die Entstehung des einschaligen Hyperboloids kann man sich also so vorstellen, dass eine Gerade sich so bewegt, dass sie immer durch drei andere feste Geraden, die nicht in einer Ebene liegen, geht. Diese drei festen Geraden (Leitlinien) können beliebig aus der einen Schaar genommen werden, die Bewegliche (Erzeugungslinie) bildet dann beim Fortschreiten die ganze zweite Schaar.

Anmerkung 2. Flächen, die durch Bewegung einer Geraden entstanden sind, wie unser Hyperboloid, nennt man geradlinige Flächen. Dieser Classe gehört auch das hyperbolische Paraboloid, der Cylinder und der Kegel an. Unter dieser Classe bilden die abwickelbaren Flächen eine besondere Gruppe. Es sind solche, wo je zwei aufeinander folgende Gerade in eine Ebene fallen. Der Kegel und der Cylinder gehören dieser Gruppe an. Der Name abwickelbare Fläche rechtfertigt sich folgendermassen. Man kann, wenn man (Fig. 13) die Ebene ABC zweier aufeinander folgender Geraden so um die zweite BC dreht, dass mit der folgenden Geraden DE eine Ebene bildet, diese Ebene dann um DE so dreht, dass die folgende Gerade FG in ihr liegt, und so fortfährt, die Fläche in eine Ebene verwandeln.

Fig. 13.



Offenbar erhält man auch eine abwickelbare Fläche, wenn eine Ebene sich nach einem bestimmten Gesetze bewegt, wo dann der Durchschnitt zweier aufeinander folgenden Lagen dieser Ebene die Schaar der Geraden bildet, welche der abwickelbaren Fläche angehört.

Berührung der Flächen.

§ 30.

Sei irgend eine Curve auf der Fläche gezogen, so ist dieselbe bestimmt durch die Gleichung der Fläche und eine zweite Gleichung zwischen x, y, z. Es kann aber auch jede Curve durch drei Gleichungen $x = f(t)$, $y = f_1(t)$, $z = f_2(t)$ bestimmt werden, wo t eine beliebige Grösse ist. In unserem Falle müssen dann, diese Werthe von x, y, z in die Gleichung der Fläche $F(x, y, z) = 0$ eingesetzt, dieselbe identisch machen. Ziehen wir nun an die so gegebene Curve

durch Punkt (x, y, z) die Tangente, so ist wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten der letzteren sind:

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dt}};$$

aus diesen Gleichungen und der Differentialgleichung der Fläche:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

folgt nun:

$$1)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0,$$

also die Gleichung einer Ebene. Sie ist völlig unabhängig von den Werthen $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, gilt also für alle Tangenten, die durch Punkt x, y, z gelegt sind. Also haben wir den Satz:

Alle Tangenten, die durch einen Punkt einer Fläche, an alle Curven in der Fläche, die durch diesen Punkt gehen, gelegt werden können, bilden eine Ebene. Diese Ebene heisst Tangentialebene der Fläche. Ihre Gleichung ist die Gleichung 1).

§ 31.

Hier giebt es aber einen Ausnahmefall, es ist der, wo die Differentialquotienten: $\frac{dF}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ verschwinden, dann wird die Gleichung 1) in der obigen Form identisch $0 = 0$.

In diesem Falle nimmt das Berührungsproblem eine andere Gestalt an. Wir wollen, ehe wir diesen Fall betrachten, die Gleichung der Fläche $F(x, y, z) = 0$ auf die einfachere Form $z = f(x, y)$ bringen. Die Gleichungen einer Curve auf dieser Fläche sind dann durch diese letztere und eine Gleichung gegeben, welche durch Elimination von z immer die Form $y = \varphi(x)$ annimmt.

Setzen wir jetzt $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) = p$, so ist:

$$2)\qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}p = \alpha + \beta p,$$

wo $\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \beta$ gesetzt wurde.

Die Gleichung der Tangente an unsere Curve wird:

$$3)\qquad \xi - x = \frac{\eta - y}{p} = \frac{\zeta - z}{\alpha + \beta p}$$

und im allgemeinen Falle bildet man die Gleichung der Tangentialebene, durch Elimination von p aus Gleichungen 3),

$$4)\qquad \alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) = \zeta - z.$$

Diese Gleichung mit 2) des vorigen Paragraphen verglichen giebt:

$$\alpha = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \beta = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{d z}};$$

wenn nun $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ und $\frac{\partial F}{\partial z}$ verschwinden, werden α und β unbestimmt und es tritt unser Ausnahmefall ein.

Es ist jedoch nicht gerade nöthig, dass diese drei Ausdrücke verschwinden. Die Unbestimmtheit, also die Unbrauchbarkeit der Gleichung 4) tritt jedesmal ein, wenn α oder β oder beide die Form $\frac{h}{k}$ annehmen und $h = k = 0$ ist. Setzen wir also dies für α voraus, sei also $\alpha = \frac{h}{k}$ und $h = k = 0$, indem wir h und k als Functionen von x, y, z betrachten. Offenbar ist dann im Allgemeinen der Werth von $\frac{h}{k}$ von der Beziehung zwischen y und x, also von der Wahl der Function $\varphi(x)$ oder der Grösse $p = \varphi'(x)$ abhängig. Dann geben die beiden Gleichungen 3), aber nach der Elimination von p keine lineare Gleichung mehr als Ort der Tangenten, sondern die Gleichung einer Fläche. Sie wird nothwendig eine Kegelfläche sein, da sie aus lauter Geraden besteht, die durch den Punkt xyz gehen. Um diese Gleichung zu bestimmen, wollen wir die Gleichung $ak = h$ differentiiren unter der Bedingung, dass h und k verschwinden und indem wir $\frac{dy}{dx} = p$ setzen. Man erhält:

$$5) \quad \alpha\left(\frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}p + \frac{\partial k}{\partial z}(\alpha + \beta p)\right) = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}p + \frac{\partial h}{\partial z}(\alpha + \beta p),$$

indem wir das mit $k = 0$ multiplicirte Glied weglassen.

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen 3) wird dann α und p eliminirt, und so die Gleichung der Kegelfläche gebildet. Ist auch $\beta = \frac{h_1}{k_1} + \frac{0}{0}$, so hat man ebenso

$$6) \quad \beta\left(\frac{\partial k_1}{\partial x} + \frac{\partial k_1}{\partial y}p + \frac{\partial k_1}{\partial z}(\alpha + \beta p)\right) = \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial y}p + \frac{\partial h_1}{\partial z}(\alpha + \beta p),$$

und dann ist aus den Gleichungen 3) 5) 6) zu eliminiren α, β, p.

Würden die ersten Differentialquotienten von h und k oder von h_1 und k_1 verschwinden, so würden α und β durch die zweiten Differentialquotienten zu bestimmen sein, u. s. w.

Es giebt aber auch hier einen bemerkenswerthen Ausnahmefall. Es ist derjenige, wo α von p unabhängig oder eine lineare Function von p, β aber von p stets unabhängig ist. Die Gleichungen 3)

geben dann nach Elimination von p noch immer eine lineare Gleichung. Es ist also eine Tangentialebene vorhanden. Jedoch können, da die Gleichungen 5) und 6) im Allgemeinen nicht linear sind, α und β mehrere Werthe haben. Es giebt dann für den betreffenden Punkt zwei oder mehrere Tangentialebenen. — Diesem Falle entsprechen in der Geometrie der Ebene die mehrfachen Punkte der Curve.

§ 32.

Erläutern wir das Gesagte durch ein Beispiel. Die Gleichung der gegebenen Fläche sei:

$$(x^2 + u^2)^2 = a^2 (x^2 - u^2),$$

wo u gegeben ist durch die Beziehung:

$$(u + \varrho)^2 = y^2 + z^2,$$

wo ϱ constant ist. Setzen wir hier $x = 0$, so muss offenbar auch $u = 0$ sein, man überzeugt sich dann leicht, dass $\frac{dz}{dx} = \alpha$ dann unbestimmt wird. Diese Unbestimmtheit können wir hier beseitigen, wenn wir $u = sx$ setzen. Wir erhalten dann als Gleichungen unserer Fläche:

1) $$x^2(s^2 + 1)^2 = a^2(1 - s^2), \quad (sx + \varrho)^2 = y^2 + z^2,$$

und für $x = 0$ wird $s^2 = 1$, $s = \pm 1$.

Wir wollen wieder setzen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \beta,$$

und ausserdem:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \gamma, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \delta.$$

Differentiiren wir die Gleichungen 1) zunächst nach x; dies giebt:

2) $$x(s^2 + 1)^2 + 2x^2 (s^2 + 1)s\gamma = - a^2 s\gamma,$$
$$(sx + \varrho)(x\gamma + s) = \alpha z,$$

also wenn wir $x = 0$ setzen:

$$\gamma = 0, \quad \alpha = \pm \frac{\varrho}{z};$$

α hat also zwei verschiedene Werthe.

Nach y differentiirend erhalten wir:

3) $$4x^2 s\delta = - a^2 s\delta \quad \text{und} \quad (sx + \varrho)x\delta = y + \beta z,$$

$$\text{also für } x = 0\text{:} \quad \delta = 0, \quad \beta = - \frac{y}{z}.$$

Der doppelte Werth von α lehrt nun, dass immer, wenn $x = 0$, also $y^2 + z^2 = \varrho^2$ ist, zwei Tangentialebenen stattfinden. Die Gleichungen dieser Tangentialebenen erhalten wir, wenn in Gleichungen 3) des vorigen Paragraphen gesetzt wird:

$$\alpha = \pm \frac{\varrho}{z}, \quad \beta = -\frac{y}{z}, \quad x = 0,$$

d. h.
$$\xi = \frac{\eta - y}{p} = \frac{\zeta - z}{\pm \frac{\varrho}{z} - \frac{yp}{z}},$$

also nach Elimination von p:

$$\pm \varrho\xi - y(\eta - y) = z(\zeta - z).$$

Wegen der Gleichungen $y^2 + z^2 = \varrho^2$ und $x = 0$ aber, welche einen Kreis in der yz-Ebene vorstellen, findet diese Berührung nicht allein in einem Punkte, sondern längs eines Kreises statt. Da aber die Werthe von y, z veränderlich sind, so sind die beiden Tangentialebenen in jedem Punkte des Kreises andere.

Aber diese Betrachtung wird illusorisch, wenn $\varrho = 0$ ist, in welchem Falle unsere Gleichungen lauten:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 - z^2).$$

Wird hierin ebenfalls $\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha$, $\frac{\partial z}{dy} = \beta$ gesetzt, und betrachten wir wieder den Fall, wo $x = 0$ ist, so muss gleichzeitig auch $y = z = 0$ sein, und für diesen Punkt erhalten wir, wenn wir die zweite Gleichung 2) nach allen x differentiiren und darin $\frac{dy}{dx} = p$ setzen, die mit x, y, z, ϱ multiplicirten Glieder aber weglassen:

$$\alpha(\alpha + \beta p) = s^2 = 1.$$

Die zweite Gleichung 3) aber giebt unter derselben Voraussetzung:

$$p + \beta(\alpha + \beta p) = 0.$$

Diese Gleichungen geben aber:

$$\beta = -p\alpha,$$

also: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - p^2}}, \quad \beta = \frac{-p}{\sqrt{1 - p^2}}, \quad \alpha + \beta p = \sqrt{1 - p^2}.$

Die Gleichungen 3) des vorigen Paragraphen geben dann, da $x = y = z = 0$ ist:

$$\xi p = \eta, \quad \xi\sqrt{1 - p^2} = \zeta, \quad \text{d. h.} \quad \eta^2 + \zeta^2 = \xi^2.$$

Dies ist die Gleichung eines Rotationskegels, dessen Scheitelwinkel ein rechter ist. Wir haben also in diesem Falle statt der Tangentialebene in der That einen Tangentialkegel.

Anmerkung. Geometrisch ergeben sich diese Resultate sehr leicht. Unsere Fläche ist nämlich eine Rotationsfläche, die entsteht, wenn man im allgemeinen Falle eine Lemniscate um eine ihrer Axe parallele Linie, im Ausnahmefalle, den wir zuletzt betrachteten, um

diese Axe selbst dreht. Man beachte auch, dass wir hier zur Bestimmung der Werthe $\frac{0}{0}$ uns vereinfachter Methoden bedient haben.

§ 33.

Folgerung 1. Wenn eine Gerade ganz auf einer Fläche liegt, so wird in jedem Punkte dieser Geraden die Tangentialebene zugleich die Gerade enthalten. Dies ist evident, da die Gerade ihre eigene Tangente ist.

Folgerung 2. Wenn durch einen Punkt einer Fläche zwei Gerade gehen, welche ganz in der Fläche liegen, so muss die Ebene, welche durch beide geht, zugleich die Tangentialebene sein: immer vorausgesetzt, dass die Punkte, um welche es sich hier handelt, nicht solche Ausnahmspunkte sind, in welchen überhaupt gar keine Tangentialebene existirt. Hieraus folgt z. B. mit Hülfe des § 29: dass jede Tangentialebene eines einschaligen Hyperboloides mit demselben zwei Gerade gemein hat. Dasselbe gilt für das hyperbolische Paraboloid, während die Tangentialebene des parabolischen Paraboloides, der Kegel und der Cylinder nur eine Gerade mit der Fläche gemein haben. Im Allgemeinen findet bei den geradlinigen Flächen entweder für alle Punkte einer ihrer Geraden dieselbe Tangentialebene statt, oder die Tangentialebene ändert sich von Punkt zu Punkt.

Zusatz. Wird die Gleichung einer Fläche in aufgelöster Form dargestellt: $z - f(x,y) = 0$, so ist $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}$, was man mit $-p$ zu bezeichnen gewohnt ist, so wie $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ mit $-q$; endlich wird $\frac{dF}{dz}$ in diesem Falle $= 1$. Unter dieser Voraussetzung wird also die Gleichung der Tangentialebene folgende Gestalt annehmen:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

deren wir uns schon § 31 bedient haben.

Offenbar kann man aus dieser Form die obige wieder ableiten. Aus der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ folgt nämlich, wenn man y als constant und z nur als Function von x ansieht:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} \text{ oder } \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0 \text{ und ähnlich } \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0,$$

woraus also (mit abgekürzter Bezeichnung) hervorgeht:

$$p = -\frac{F'(x)}{F'(z)}, \quad q = -\frac{F'(y)}{F'(z)}.$$

Setzen wir dies in die soeben aufgestellte Gleichung ein, so verwandelt sie sich in die ursprüngliche

$$(\xi - x) F'(x) + (\eta - y) F'(y) + (\zeta - z) F'(z) = 0.$$

Bemerkung. Beide Formen der für die Tangentialebenen aufgestellten Gleichung sind allgemein richtig, die Coordinaten mögen rechtwinklige oder schiefwinklige sein. Für das Folgende würde die Annahme schiefwinkliger Coordinaten eine Abweichung bedingen. Wir setzen daher von jetzt ab rechtwinklige Coordinaten voraus.

§ 34.

Bei den algebraischen Flächen lässt sich die Gleichung der Tangentialebene sehr vereinfachen, und soll dies hier gleich allgemein gezeigt werden. Zunächst bilden wir jedoch erst die Gleichung dieser Ebene für eine Fläche 2ten Grades, die einen Mittelpunkt hat. Die Gleichung einer solchen Fläche nimmt bekanntlich immer die Form an:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Es ist dann nach dem Obigen die Gleichung der Tangentialebene:

$$(\xi - x)\, Ax + (\eta - y)\, By + (\zeta - z)\, Cz = 0,$$

oder, da für den Punkt xyz die Gleichung $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ besteht: $Ax\xi + By\eta + Cz\zeta - 1 = 0$, eine der Gleichung der vorgelegten Fläche sehr conforme Gestalt.

Eine ganz ähnliche Transformation lässt sich bei allen Tangentialebenen algebraischer Flächen machen. Es sei $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer Fläche des n^{ten} Grades, in der alle Nenner und Wurzelgrössen, welche die Coordinaten enthalten, weggeschafft zu denken sind. Dann besteht die Gleichung $F = 0$ aus einer Reihe von Gliedern, von denen die höchsten von der n^{ten} Dimension sind; auf diese kommen Glieder von der $\overline{n-1}^{ten}$ Dimension, u. s. w. Jede Gruppe von solchen Gliedern, wenn wir sie nach den Dimensionen eintheilen, ist homogen, d. h. in jeder Gruppe ist die Summe der Exponenten der Coordinaten constant. Ueber solche homogene Functionen existirt nun folgender Satz:

Lemma. Wenn U_m eine homogene Function des m^{ten} Grades von den drei Variabeln x, y, z bedeutet, so hat man folgende Gleichung:

$$x \cdot \frac{\partial U_m}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial U_m}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial U_m}{\partial z} = m \cdot U_m.$$

Der **Beweis** ist leicht zu führen: U_m wird bestehen aus einer Summe von Gliedern von folgender Art: $x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma$, worin $\alpha + \beta + \gamma = m$ ist. Differentiirt man ein solches Glied nach x und multiplicirt es alsdann mit x, so erhält man $\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot y^\beta \cdot z^\gamma \cdot x$ oder $\alpha \cdot x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma$. Behandelt man das Glied ebenso in Bezug auf y und dann in Bezug auf z, so erhält man resp. $\beta \cdot x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma$ und $\gamma \cdot x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma$. Addirt man diese drei Ausdrücke, so erhält man

$$(\alpha + \beta + \gamma)\, x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma \text{ oder } m \cdot x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma;$$

und so mit jedem Gliede, woraus U_m besteht.

Es habe nun die vorgelegte Function $F(x, y, z)$ die Form

$$U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \ldots\ldots + U_1 + U_0,$$

so dass die Summe (in welcher U_0 eine Constante bedeutet) gleich Null ist; dann ist die Gleichung der Tangentialebene:

$$(\xi - x) \left\{\frac{\partial U_n}{\partial x} + \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial U_{n-2}}{\partial x} + \cdots\cdots + \frac{\partial U_1}{\partial x}\right\}$$
$$+ (\eta - y) \left\{\frac{\partial U_n}{\partial y} + \frac{\partial U_{n-1}}{\partial y} + \frac{\partial U_{n-2}}{\partial y} + \cdots\cdots + \frac{\partial U_1}{\partial y}\right\}$$
$$+ (\zeta - z) \left\{\frac{\partial U_n}{\partial z} + \cdots\cdots + \frac{\partial U_1}{\partial z}\right\} = 0$$

oder nach dem Lemma

$$\xi \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \cdot \frac{\partial F}{\partial z}$$
$$= n \cdot U_n + \overline{n-1} \cdot U_{n-1} + \overline{n-2} \cdot U_{n-2} + \cdots\cdots + 2\, U_2 + U_1,$$

woraus wir noch die Glieder der höchsten Dimension, nämlich U_n, mittels der Gleichung $U_n = -(U_{n-1} + U_{n-2} + \cdots\cdots + U_0)$ eliminiren können, so dass hiernach endlich die Gleichung der Tangentialebene für algebraische Curven wird:

$$\xi \cdot F'(x) + \eta \cdot F'(y) + \zeta \cdot F'(z) + U_{n-1} + 2\, U_{n-2} + 3\, U_{n-3}$$
$$+ \cdots\cdots + \overline{n-1} \cdot U_1 + n\, U_0 = 0,$$

wo unter $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$ die Differentialquotienten von F nach x, y, z verstanden sind.

Aus dieser Form der Gleichung wollen wir zunächst noch einen Schluss ziehen.

Von einem Punkte (ξ, η, ζ) ausserhalb der Fläche n^{ten} Grades soll eine Tangentialebene an dieselbe gelegt werden.

Die Coordinaten des Berührungspunktes (x, y, z) sind hier die Unbekannten. Um sie zu bestimmen, haben wir die Gleichung der Fläche und die der Tangentialebene, also eine Gleichung n^{ten} und eine $\overline{n-1}^{\text{ten}}$ Grades zwischen x, y und z. Die letztere, wenn wir in ihr x, y, z als laufende Coordinaten ansehen, stellt ebenfalls eine Fläche, beide also zusammen stellen eine Curve dar, auf welcher alle Berührungspunkte derjenigen Tangentialebenen liegen, die den Punkt $\xi\eta\zeta$ gemein haben. Sie hüllen somit einen Kegel ein und für diesen gilt der Satz:

W e n n m a n v o n e i n e m P u n k t e $\xi\eta\zeta$ e i n e n K e g e l a n e i n e F l ä c h e d e s n^{ten} G r a d e s l e g t, dessen Tangentialebenen auch sämmt-

lich solche für die Fläche sind, so liegt die Berührungscurve auf einer Fläche des $\overline{n-1}^{\text{ten}}$ Grades.

Hiervon ist ein specieller Fall: die Curve, in welcher solcher Kegel einer Fläche zweiten Grades dieselbe berührt, ist eine ebene, ein bekannter, sehr wichtiger Satz aus der Theorie der Flächen zweiten Grades. Er folgt einfach daraus, dass $n = 2$, also die Fläche vom $\overline{n-1}^{\text{ten}}$ Grade eine Ebene ist. Für die Flächen dritten Grades findet man: Legt man von einem Punkte an eine Fläche dritten Grades einen solchen Kegel, so wird die Berührungscurve eine Curve doppelter Krümmung, doch so, dass sich durch dieselbe jedesmal eine Fläche zweiten Grades legen lässt, es ist nämlich $n - 1 = 2$; sie ist also der Durchschnitt der gegebenen Fläche und einer gewissen Fläche zweiten Grades.

§ 33.

Man kann jedoch der Gleichung der Tangentialebene noch eine andere Form geben, in welcher sie vollkommen symmetrisch ist. Die Gleichung der gegebenen Fläche $F(x, y, z) = 0$ besteht zwar aus homogenen Gruppen, ist selbst aber nicht homogen in Bezug auf x, y, z. Wir können sie aber homogen machen, wenn wir eine vierte Grösse w einführen. Schreiben wir nämlich statt $F(x, y, z) = 0$ den Ausdruck $w^n F\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right) = 0$, wo nach vollführter Rechnung $w = 1$ gesetzt werden soll, so wird die Gleichung der Fläche:

$$U_n + w\,U_{n-1} + w^2\,U_{n-2} + \cdots\cdots + w^n U_0 = 0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf x, y, z, w homogen und vom Grade n. Der Differentialquotient nach w aber ist:

$$U_{n-1} + 2w\,U_{n-2} + 3w^2\,U_{n-3} + \cdots\cdots + nw^{n-1}\,U_0,$$

und setzt man hierin $w = 1$, so sieht man, dass mit Anwendung dieser Bezeichnung die Gleichung der Tangentialebene einer algebraischen Fläche in folgende Gestalt gebracht werden kann:

$$\xi \cdot F'(x) + \eta \cdot F'(y) + \zeta \cdot F'(z) + \omega \cdot F'(w) = 0,$$

wo auch ω gleich 1 zu setzen ist. (Die Einführung dieses Factors geschieht nur der Symmetrie wegen.)

Um also die Gleichung der Tangentialebene einer algebraischen Fläche symmetrisch zu machen, führe man eine Grösse w ein, welche dazu dient, alle Glieder der Gleichung $F = 0$ homogen zu machen, so dass die Gleichung der Fläche jetzt wird $F(x, y, z, w) = 0$. Dann ist die Gleichung der Tangentialebene:

$$\xi \cdot F'(x) + \eta \cdot F'(y) + \zeta \cdot F'(z) + \omega \cdot F'(w) = 0,$$

worin man nach der Aufstellung derselben w und ω gleich 1 zu setzen hat.

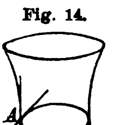
§ 36.

Zwischen der Theorie der Tangentialebene der Flächen und der Tangenten der ebenen Curven findet, wie schon die entsprechenden Gleichungen zeigen, eine gewisse Analogie statt. Diese Analogie erstreckt sich nun nicht mehr auf die folgende Betrachtung.

Die Tangenten ebener Curven nämlich befinden sich im Allgemeinen ganz, oder wenigstens die dem Berührungspunkte benachbarten endlichen Stücke ganz auf einer Seite der Curve, und in Ausnahmefällen, also für durch endliche Strecken getrennte Punkte der Curve (den Wendepunkten), findet ein Durchschneiden der Curve durch die Tangente statt, auch kann bei algebraischen Curven nur eine endliche Anzahl solcher Wendepunkte vorhanden sein.

Bei den Tangentialebenen nun wird sich zeigen, dass eben so gut der Fall sein kann, dass die Tangentialebene in der ganzen Umgebung des Berührungspunktes auf einer Seite der Fläche liegt, wie es offenbar bei der Kugel und dem Ellipsoid der Fall ist, als auch dass die Tangentialebene die Fläche durchschneidet, dies ist also kein Ausnahmefall. Ein Beispiel dafür würde diejenige Fläche sein, welche entsteht, wenn man einen Kreisbogen um eine Gerade dreht, welche mit dem Mittelpunkte nicht auf derselben Seite des Bogens liegt. (Fig. 14.)

Fig. 14.



Offenbar nämlich enthält die Tangentialebene in Punkt A sowohl die Tangente an den rotirenden Bogen, als an den Kreis, welchen Punkt A beschrieben hat, und die durch beide bestimmte Ebene muss die Fläche schneiden. Eine solche Fläche nennt man Sattelfläche. Der Durchschnitt der Tangentialebene und der Fläche wird bei einer solchen im Allgemeinen eine Curve sein.

Indessen giebt es auch hier Ausnahmen. Es kann die Tangentialebene mit der Fläche eine Linie gemein haben, ohne in der Nähe des Berührungspunktes dieselbe zu schneiden. Dies ist z. B. beim Kegel der Fall, wo die Tangentialebene mit der Fläche eine Gerade gemein hat, die erst in der Kegelspitze die Fläche schneidet. Der Fall, wo diese Spitze Berührungspunkt ist, bleibt aber ausgeschlossen, da in derselben keine Tangentialebene, sondern ein Tangentenkegel (der gegebene Kegel selbst) vorhanden ist. Um den Grund dieses Verhaltens einzusehen und die entsprechenden Bedingungen für die

verschiedenen Fälle zu finden ist es vortheilhaft, das Berührungsproblem der Flächen aus der analytischen Theorie der Grenzfälle (Maxima und Minima) der Functionen von zwei Variablen abzuleiten. Es muss dabei aber, wenn man alle Fälle berücksichtigt, diese Theorie in anderer Weise gegeben werden, als es sonst gebräuchlich ist. Dabei scheint es angemessen, von den Grenzfällen der Functionen mit einer Variablen auszugehen. Die Anwendung auf unser Problem wird dann folgen.

Digression auf die Theorie der Maxima und Minima bei einer und zweien Variablen.

§ 37.

Definition. Eine Function einer Variablen $y = f(x)$ heisst im Zunehmen, so lange als mit zunehmendem x auch y zunimmt, im Abnehmen, so lange mit zunehmendem x eine Abnahme von y stattfindet. Sie hat bei den Werthen ein Maximum, wo sie vom Zunehmen ins Abnehmen, ein Minimum, wo sie vom Abnehmen ins Zunehmen übergeht. x und y sind hier immer als reell vorausgesetzt und die Werthe von x, wo y vom Reellen ins Imaginäre übergeht, bleiben ausgeschlossen.

Suchen wir jetzt die Bedingungen für diese Fälle. Ist $a < b$, und in dem Gebiete von $x = a$ und bis $x = b$ die Function im Zunehmen, sei $h < b - a$, also auch positiv, so hat man für alle Werthe von x zwischen a und b: $f(x + h) > fx$. Da aber a und b zwar um eine endliche aber beliebig kleine Grösse verschieden sein können, so ist dies im Allgemeinen nur richtig, wenn h selbst über alle Grenzen klein ist, also wenn:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) > f(x)$$

und da h positiv war, wenn $f'(x)$ positiv ist.

Ist aber die Function im Abnehmen, so hat man bei positivem h

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) < f(x),$$

also wenn $f'(x)$ negativ ist. Also:

So lange eine Function $f(x)$ $\begin{matrix}\text{zunimmt,}\\ \text{abnimmt,}\end{matrix}$ ist ihr Differentialquotient $f'(x)$ $\begin{matrix}\text{positiv.}\\ \text{negativ.}\end{matrix}$ Soll nun die Function ein $\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}$ haben, so muss $f'(x)$ vom $\begin{matrix}\text{Positiven}\\ \text{Negativen}\end{matrix}$ ins $\begin{matrix}\text{Negative}\\ \text{Positive}\end{matrix}$ übergehen. Setzen wir noch voraus, dass $f'(x)$ für den betreffenden Werth von x continuirlich ist,

so muss also in beiden Fällen $f'(x)$ verschwinden. Also: für die Werthe von x, wo $f(x)$ ein Maximum oder Minimum hat, wird $f'(x) = 0$.

Es ist nun der Fall des Maximums von dem des Minimums zu unterscheiden. Im ersteren Falle geht $f'(x)$ vom Positiven durch Null zum Negativen über, ist also im Abnehmen, und also nach dem Vorigen der Differentialquotient von $f'(x)$, also $f''(x)$ negativ. Im letzteren Falle geht $f'(x)$ vom Negativen durch Null zum Positiven über, ist also im Zunehmen, also $f''(x)$ positiv.

Nun kann aber auch $f'(x)$ verschwinden, ohne dass ein Grenzfall stattfindet, d. h. $f'(x)$ ist erst $\begin{matrix}\text{positiv,}\\ \text{negativ,}\end{matrix}$ dann Null, bleibt aber dann $\begin{matrix}\text{positiv,}\\ \text{negativ,}\end{matrix}$ d. h. $f'(x)$ ist selbst ein $\begin{matrix}\text{Minimum,}\\ \text{Maximum,}\end{matrix}$ also muss $f''(x)$ verschwinden und es wird der Differentialquotient von $f''(x)$, also $f'''(x)$ $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ sein. Nun kann aber gleichzeitig mit $f'(x)$ und $f''(x)$ möglicher Weise $f'''(x)$ verschwinden. Dann kommt es auf das Zeichen von $f^{IV}(x)$ an, ist dieses $\begin{matrix}\text{positiv,}\\ \text{negativ,}\end{matrix}$ so ist $f''(x)$ ein $\begin{matrix}\text{Minimum,}\\ \text{Maximum,}\end{matrix}$ hat also die Werthe $\begin{matrix}+\,0\,+,\\ -\,0\,-,\end{matrix}$ bleibt also $\begin{matrix}\text{positiv,}\\ \text{negativ,}\end{matrix}$ und aus diesem Grunde ist $f'(x)$ kein Grenzwerth, also $f(x)$ ein $\begin{matrix}\text{Minimum.}\\ \text{Maximum.}\end{matrix}$ In dieser Weise kann man fortfahren, und kommt so zu dem bekannten Kriterium der Maxima und Minima: Ein $\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}$ findet statt, wenn eine ungerade Anzahl der ersten auf einander folgenden Differentialquotienten verschwindet, der erste vorhandene Differentialquotient aber $\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}$ ist. Ist die Anzahl der verschwindenden Differentialquotienten aber gerade, so findet kein Grenzwerth statt.

§ 38.

Wir wenden uns jetzt zu den Grenzwerthen einer Function zweier Variablen $z = f(x, y)$. Damit eine solche ein $\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}$ habe, ist nöthig, dass diese Eigenschaft für den betreffenden Werth $x = x_1$, $y = y_1$ für jede Beziehung, die zwischen x und y herrscht, stattfinde, vorausgesetzt, dass diese Beziehung für $x = x_1$ auch $y = y_1$ und reelles z ergiebt. Die erste Bedingung aber ist durch die Gleichung

$y - y_1 = \varphi(x) - \varphi(x_1)$ ausgedrückt, wo $\varphi(x)$ und daher auch $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ völlig willkürlich ist. Sei $\frac{dy}{dx} = p$. Man hat also nach vorigem Paragraph den Satz:

Ein Maximum oder Minimum findet statt, wenn die $2n - 1^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ ... verschwinden, der $2n^{\text{te}}$ aber nicht, wenn man y als Function von x betrachtet und $\frac{dy}{dx} = p$ willkürlich ist. Es ist also

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + p\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

was bei willkürlichem p nur möglich, wenn

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ist. Dann ist aber

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}p + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}p^2,$$

und soll auch dieser Ausdruck verschwinden, so muss

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

sein und so fort. Wir kommen also zu der Bedingung:

Soll für jede Beziehung zwischen y und x ein Grenzwerth für z eintreten, so müssen alle partiellen Differentialquotienten von z für x und y bis zu denen $2n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung, diejenigen $2n^{\text{ter}}$ Ordnung aber nicht alle gleichzeitig verschwinden. Dagegen findet kein Grenzwerth statt, wenn sämmtliche Differentialquotienten bis zu denen $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, aber nicht alle $2n + 1^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden.

Die erste Bedingung aber ist nach vorigem Paragraph nicht ausreichend. Soll ein Maximum bezüglich Minimum vorhanden sein, so muss der erste nicht verschwindende vollständige Differentialquotient:

$$\frac{d^{2n}z}{dx^{2n}} = \frac{\partial^{2n}z}{\partial x^{2n}} + 2n\frac{\partial^{2n}z}{\partial x^{2n-1}\partial y}p + \frac{2n(2n+1)}{1 \cdot 2}\frac{\partial^{2n}z}{\partial x^{2n-2}\partial y^2}p^2$$
$$+ \cdots + \frac{\partial^{2n}z}{\partial y^{2n}}p^{2n}$$

für jeden Werth von p im ersten Falle negativ, im zweiten positiv sein. — Hieraus ergiebt sich nun eine Abweichung von der Theorie der Functionen mit einer Variablen. Hat nämlich der Ausdruck $\frac{d^{2n}z}{dx^{2n}}$ für gewisse Werthe von p, also von $\varphi'(x)$, das positive, für andere das negative Zeichen, so findet allerdings für jede solche Beziehung (welche z also als Function von x allein ergiebt) ein Maximum be-

züglich Minimum statt; da aber bald das Eine, bald das Andere stattfindet, so ist z als Function zweier Variablen betrachtet, somit weder das Eine noch das Andere. — Untersuchen wir also auf diese Fälle hin den Ausdruck $\frac{d^{2n} z}{d x^{2n}}$, den wir unter die Form bringen:

$$\frac{d^{2n} z}{d x^{2n}} = A(p^{2n} + \alpha_1 p^{2n-1} + \alpha_2 p^{2n-1} + \cdots + \alpha_{2n}),$$

wo also $A = \frac{\partial^{2n} z}{\partial y^{2n}}$ ist.

Setzt man diesen Ausdruck gleich Null, und sind die reellen Wurzeln der so entstehenden Gleichung $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2s}$, die imaginären $\gamma_1 + \delta_1 i$, $\gamma_1 - \delta_1 i$, $\gamma_2 + \delta_2 i$, $\gamma_2 - \delta_2 i$ u. s. w., so hat man:

$$\frac{d^{2n} z}{d x^{2n}} = A(p - \beta_1)(p - \beta_2)(p - \beta_{2s})((p - \gamma_1)^2 + \delta_1^2)$$
$$((p - \gamma_2)^2 + \delta_2^2) \ldots .$$

Hat unsere Gleichung keine reellen Wurzeln, so ist also A stets mit einem positiven Factor multiplicirt, hat sie aber auch reelle, so ist dieser Factor nur positiv, wenn eine gerade Anzahl der β einander gleich ist; ist letzteres nicht der Fall, so wechselt $p - \beta$ oder $(p - \beta)^{2h-1}$, wenn p die Werthe $\beta - \nu$ und $\beta + \nu$ annimmt, sein Vorzeichen, ohne dass dies bei einem andern Factor geschieht. Also: Damit die Function ein $\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}$ sei, muss $\frac{d^{2n} z}{d y^{2n}}$ $\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}$ sein, die Gleichung $\frac{d^{2n} z}{d x^{2n}}$ aber nur imaginäre und solche reelle Wurzeln haben, deren jede eine gerade Anzahl von Malen vorkommt.

Noch ist der Fall zu erwägen, wo $\frac{\partial^{2n} z}{\partial y^{2n}} = 0$ und etwa noch eine Anzahl vorhergehender partieller Differentialquotienten $2n^{\text{ter}}$ Ordnung $\frac{\partial^{2n} z}{\partial x \partial y^{2n-1}}$ u. s. w. verschwinden. Sei die Anzahl der verschwindenden gerade, und sei B der letzte noch vorhandene Differentialquotient, so ist der Ausdruck für $\frac{d^{2n} z}{d x^{2n}}$ nach p von gerader Ordnung. Die Bedingung für die Wurzeln der Gleichung gilt noch immer, und die Bedingung, ob ein Maximum oder Minimum vorhanden sei, hängt vom Vorzeichen von B ab, während die obige Bedingung für die Wurzeln der Gleichung bestehen bleibt. Ist aber die Anzahl der verschwindenden Differentialquotienten ungerade, so entsteht eine Gleichung von ungerader Ordnung, welche immer eine ungerade Anzahl reeller Factoren hat, mithin keinen Grenzwerth ergiebt. Also die Bedingung für das $\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}$

ist allgemein: Die partiellen Differentialquotienten von z bis denen zur $2n - 1^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden, und wenn man den $2n^{\text{ten}}$ auf die Form bringt:

$$\frac{d^{2n} z}{d x^{2n}} = B(p^s + \alpha_1 p^{s-1} + \cdots + \alpha_s),$$

so muss dieser Ausdruck von gerader Ordnung nach p sein, die Gleichung $\frac{d^{2n} z}{d x^{2n}} = 0$ darf nur imaginäre und solche reelle Wurzeln haben, deren jede eine gerade Anzahl von Malen vorkommt, es muss ferner $B = \frac{\partial^{2n} z}{\partial x^{2n-2s} \partial y^{2s}}$ $\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}$ sein. Der häufigst vorkommende Fall ist derjenige, wo $n = 1$, also

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2p \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + p^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

nicht gleich 0 ist. Bedingung des $\begin{matrix}\text{Maximums}\\\text{Minimums}\end{matrix}$ ist nun, nach Obigem, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ $\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}$ oder $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}$ ist; im ersteren Falle muss dann die Gleichung $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$ entweder zwei imaginäre Wurzeln haben, es muss also

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2} - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}}$$

imaginär d. h.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

sein, oder sie muss zwei gleiche reelle Wurzeln haben, die Bedingung für letztere aber ist offenbar:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Also allgemein ein $\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}$ erfordert, dass

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ $\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}$ und

2) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x d y}\right)^2$ gleich oder kleiner als $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ist.

Der Fall, wo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,$$

ist hier eingeschlossen, jedoch muss in diesem Falle $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}$ sein.

Die Bedingung 1), dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ $\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}$ sein muss, ist aber mit dieser letzteren, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}$ ist, immer identisch, denn wegen Bedingung 2) haben $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ immer dasselbe Vorzeichen.

Der Fall indess, wo zwei Wurzeln reell und gleich sind, hat noch seine besondere Bedeutung. Es kann nämlich der Fall sein, dass nicht bloss für zwei zusammengehörige Werthe $x = x_1$ und $y = y_1$ ein Grenzwerth stattfindet, sondern dass für alle Werthe von y, welche eine Gleichung $y = \psi(x)$ erfüllen, ein solcher vorhanden ist, d. h. für alle Werthe, die den in der letzten Gleichung enthaltenen Werthen von x und y benachbart sind, ohne diese Gleichung zu erfüllen, sich grössere bezüglich kleinere Werthe von z ergeben.

Es ist dann immer $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, wenn $y = \psi(x)$ gesetzt wird, d. h. für y gleich $\psi(x)$ verschwinden diese partiellen Differentialquotienten identisch, mithin auch ihre totalen Differentiale, d. h. es ist in diesem Falle:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\psi'(x) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\psi'(x) = 0,$$

woraus sich nach Elimination von $\psi'(x)$ ergiebt:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial f^2}{\partial y^2}.$$

Die Vollständigkeit erfordert, diese Betrachtung auch auf den allgemeinen Fall auszudehnen.

Nehmen wir an, es fände für jedes x ein Grenzwerth statt, wenn man $y = \psi(x)$ setzt, und es verschwänden unter dieser Bedingung alle partiellen Differentialquotienten dieser Function bis zum $(2n - 1)^{\text{ten}}$, so müssten auch die totalen Differentialquotienten von diesen letzten $(2n - 1)$ partiellen verschwinden, wenn $y = \psi(x)$ gesetzt wird. Sei $\psi'(x)$ noch gleich v, so ist also:

$$\frac{\partial^{2n} z}{\partial x^{2n}} + v\frac{\partial^{2n} z}{\partial x^{2n-1}\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^{2n} z}{\partial x^{2n-1}\partial y} + v\frac{\partial^{2n} z}{\partial x^{2n-2}\partial y^2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots \frac{\partial^{2n} z}{\partial x \partial y^{2n-1}} + v\frac{\partial^{2n} z}{\partial y^{2n}} = 0,$$

oder, wenn wir $\frac{\partial^{2n} z}{\partial y^{2n}} = A$ setzen:

$$\frac{\partial^{2n} z}{\partial x \partial y^{2n-1}} = -Av, \qquad \frac{\partial^{2n} z}{\partial x^2 \partial y^{2n-2}} = Av^2,$$

$$\frac{\partial^{2n} z}{\partial x^3 \partial y^{3n-3}} = -Av^3, \quad \ldots \frac{\partial^{2n} z}{\partial x^{2n}} = Av^n.$$

Die Gleichung:

$$\frac{d^{2n} z}{d x^{2n}} = \frac{\partial^{2n} z}{\partial y^{2n}} p^{2n} + \frac{2n \partial^{2n} z}{\partial y^{2n-1} \partial x} p^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \frac{\partial^{2n} z}{\partial y^{2n-2} \partial x^2} p^{2n-2} + \cdots + \frac{\partial^{2n} z}{\partial x^{2n}}$$

nimmt hiernach die Form an:

$$\frac{d^{2n} z}{d x^{2n}} = A\left(p^{2n} - 2np^{2n-1}v + \frac{2n(n-1)}{1 \cdot 2} p^{2n-2}v^2 - \cdots\right) = A(p-v)^{2n}.$$

Der Ausdruck $\frac{d^{2n} z}{d x^{2n}}$ hat also $2n$ gleiche Wurzeln; d. h. soll für jeden Werth von z, wo $y = \psi(x)$ ist, ein Grenzwerth stattfinden, so muss für diese Werthe die Gleichung $\frac{d^{2n} z}{d x^{2n}} = 0$ $2n$ gleiche reelle Wurzeln haben.

§ 39.

Es soll das zuletzt Gesagte durch zwei einfache Beispiele ererläutert werden.

Es sei $\qquad f(x, y) = (x - ay)^4 + b(x - ay)^2,$

also
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x - ay)^3 + 2b(x - ay),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4a(x - ay)^3 - 2ab(x - ay),$$

Ausdrücke, welche beide verschwinden, wenn $x = ay$ gesetzt wird.

Nun ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12(x - ay)^2 + 2b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12a(x - ay)^2 - 2ab,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = +12a^2(x - ay)^2 + 2a^2 b,$$

also für $x = ay$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x dy} = -2ab, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a^2 b,$$

und für $\frac{dy}{dx} = p$, wo p ganz beliebig ist:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 2a^2 bp^2 - 4abp + 2b = 2b(ap - 1)^2.$$

Es sind also zwei gleiche relle Werthe vorhanden, welche immer, wenn $x = ay$ ist, die Function zum Minimum machen.

Sei ferner:

$$f(x,y) = (x-y)^6 + a(x-y)^4,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6(x-y)^5 + 4a(x-y)^3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6(x-y)^5 - 4a(x-y)^3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 30(x-y)^4 + 12a(x-y)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -30(x-y)^4 - 12a(x-y)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 30(x-y)^4 + 12a(x-y)^2,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 120(x-y)^3 + 24a(x-y),$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -120(x-y)^3 - 24a(x-y),$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 120(x-y)^3 + 24a(x-y),$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -120(x-y)^3 - 24a(x-y).$$

Alle diese Ausdrücke verschwinden für $y = x$, und unter dieser Bedingung hat man:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = 24a, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = -24a, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = 24a,$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = -24a, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 24a,$$

also:

$$\frac{d^4 f}{dx^4} = 24a(1-p)^4.$$

Die Function ist also für $y = x$ immer ein Minimum.

§ 40.

Die vorhergehenden Betrachtungen wenden wir jetzt auf das Berührungsproblem der Flächen an.

Für einen beliebigen Punkt nennt man diejenige Seite einer Fläche, welche sie der Tangentialebene in diesem Punkte zukehrt, die convexe, die abgekehrte die concave Seite. Sattelflächen sind also concav-convexe Flächen. Bezeichnen wir jetzt die dritte Coordinate der Tangentialebene mit Z, während z für die Fläche selbst gilt, so ist in der Umgebung eines Punktes $(x_1 y_1 z_1)$ der Ausdruck $z - Z$ die senkrecht zur xy-Ebene genommene Entfernung der Tangentialebene von der Fläche, und diese Differenz ist $\begin{matrix}\text{positiv,}\\ \text{negativ,}\end{matrix}$ je nach-

dem die xy-Ebene sich für den betreffenden Punkt auf der $\begin{matrix}\text{convexen}\\ \text{concaven}\end{matrix}$ Seite der Fläche befindet. (Im Falle die xy-Ebene im betreffenden Punkte die Fläche schneidet, findet das $\pm$-Zeichen statt, wenn erstere vom $\begin{matrix}\text{convexen}\\ \text{concaven}\end{matrix}$ zum $\begin{matrix}\text{concaven}\\ \text{convexen}\end{matrix}$ übergeht.) Hat nun die Tangentialebene in der Umgebung von $(x_1 y_1 z_1)$ nur einen Punkt mit der Fläche gemein, so behält also der Ausdruck $z - Z$ sein Zeichen in der Umgebung des Punktes $(x_1 y_1 z_1)$ und verschwindet nur für diesen, es ist also $z - Z$ für diesen Punkt ein $\begin{matrix}\text{Minimum.}\\ \text{Maximum.}\end{matrix}$ Sei nun die Flächengleichung $z = f(x, y)$, also die der Tangentialebene

$$1)\qquad Z = z_1 + \frac{\partial z_1}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial z_1}{\partial y_1}(y - y_1),$$

also:

$$2)\qquad z - Z = z - z_1 - \frac{\partial z_1}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial z_1}{\partial y_1}(y - y_1).$$

In den Kriterien, die im vorletzten Paragraph für die Grenzwerthe gegeben sind, ist also z oder f durch $z - Z$ zu ersetzen, und man hat, wenn die höheren Differentialquotienten nicht verschwinden, für den betrachteten Fall, für Punkt $(x_1 y_1 z_1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z_1}{\partial y_1},$$

wie selbstverständlich, ausserdem aber muss $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$ kleiner oder gleich $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, und $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial z^2}{\partial y^2}$ $\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}$ sein.

Für den Fall nun, dass die Gleichung $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ stattfindet, haben wir gesehen, dass es möglich ist, dass für alle Werthe, wo eine Beziehung $y = \psi(x)$ für beliebiges x stattfindet, ein Grenzwerth eintreten kann. Dann aber muss diese Gleichung in Gemeinschaft mit der der Fläche, oder der Tangentialebene, oder auch die beiden letzteren für sich, eine ebene Curve ergeben, in welcher die Berührung stattfindet. Man wird also zunächst, wenn die Gleichung $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ in der That stattfindet, untersuchen, ob sich aus den Gleichungen der Tangentialebene und der Fläche durch Elimination von z eine Gleichung $y = \psi(x)$ bilden lässt, welche eine durch diesen Punkt gehende Curve, also reelle Werthe von y ergiebt. In diesem Falle findet ein Maximum oder Minimum von $z - Z$ für diese ganze Curve statt, und die Tangentialebene wird in dieser ganzen Curve die Fläche berühren. Wohl zu merken aber ist, dass nicht

umgekehrt die Gleichung $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dies immer bedingt, sondern dass nur durch die angegebene Elimination dies festgestellt oder verneint wird.

Nun wenden wir uns zu dem Falle, wo $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 > \frac{\partial^2 z}{dx^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ist, also $z - Z$ in der Umgebung des betrachteten Punktes sein Zeichen wechselt; hier findet kein Grenzfall statt. Die Fläche liegt auf verschiedenen Seiten der Tangentialebene und schneidet dieselbe somit. Dies findet aber auch noch statt, wenn alle 2ten, nicht aber wenn alle 3ten Differentialquotienten verschwinden, da auch dann kein Grenzfall vorhanden ist.

Für den Fall, dass auch die höheren Differentialquotienten verschwinden, folgt alles Nöthige aus § 38, da wegen des Verschwindens der höheren Differentialquotienten von Z die dort gegebenen Formen bestehen bleiben. Immer bedeutet dort das Vorhandensein bezüglich Nichtvorhandensein eines Grenzwerthes ein Berühren oder Schneiden der Fläche durch die Tangentialebene.

Ein Grenzwerth für den Fall, wo eine Gleichung $y = \psi(x)$ erfüllt wird, kann aber ein Berühren in einer Curve bedeuten.

§ 41.

Wir wenden dies zunächst auf die Flächen 2ten Grades, die einen Mittelpunkt haben, an. Sei wieder die Gleichung einer solchen:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

so ergiebt sich hieraus:

$$Ax + Cz\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad By + Cz\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$ACz^2 + A^2x^2 + C^2z^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad BCz^2 + B^2y^2 + C^2z^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$ABxy + C^2z^3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{AB(Cz^2 + Ax^2)(Cz^2 + By^2)}{C^4z^6},$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{A^2B^2x^2y^2}{C^4z^6}.$$

Es ist also $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$ grösser oder kleiner als $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, je nachdem $AB^2x^2y^2$ grösser oder kleiner als $B(Cz^2 + Ax^2)(Cz^2 + By^2)$ ist, da A immer positiv genommen werden kann, d. h. je nachdem $BCz^2(Ax^2 + By^2 + Cz^2)$, oder was dasselbe ist BCz^2 negativ oder positiv ist. Das letztere findet statt, wenn B und C gleiche Zeichen haben, und in diesem Falle findet also ein Berühren durch die Tangentialebene statt. Dieser Fall betrifft also das Ellipsoid und das

zweischalige Hyperboloid. Haben B und C aber ungleiche Zeichen, also beim einschaligen Hyperboloid, so schneidet die Tangentialebene die Fläche.

Suchen wir aber jetzt noch die Schnittlinie für diesen Fall. Es seien die Coordinaten des Punktes, durch welchen die Tangentialebene gelegt ist, x_1, y_1, z_1. Dieselbe ergiebt sich aus den drei Gleichungen:

1) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

2) $$Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 = 1,$$

3) $$Axx_1 + Byy_1 + Czz_1 = 1.$$

Wir setzen:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m, \quad \frac{z - z_1}{x - x_1} = n,$$

und erhalten, wenn wir von den beiden ersten die doppelte dritte abziehen:

$$A + Bm^2 + Cn^2 = 0,$$

und aus den beiden letzten:

$$Ax_1 + By_1 m + Cz_1 n = 0.$$

Eliminirt man n, so erhält man:

4) $$A(Cz_1^2 + Ax_1^2) + B(Cz_1^2 + By_1^2)m^2 + 2ABmxy = 0,$$

oder wegen Gleichung 2)

$$B(1 - Ax_1^2)m^2 + 2ABx_1y_1m + A(1 - By_1^2) = 0;$$

soll diese Gleichung reelle Wurzeln haben, so muss bei positivem A und B

$$(1 - By_1^2)(1 - Ax_1^2) < x_1^2y_1^2AB$$

sein, d. h. $1 - Ax_1^2 - By_1^2$ oder Cz_1^2 negativ, man erhält also beim einschaligen Hyperboloid, wenn m_1 und m_2 die Wurzeln obiger Gleichung sind, da zu jedem m nur ein n gehört:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \quad \text{und} \quad z - z_1 = n_1(x - x_1),$$

$$y - y_1 = m_2(x - x_1) \quad \text{und} \quad z - z_1 = n_2(x - x_1),$$

also die Gleichungen zweier Geraden, die durch Punkt $(x_1y_1z_1)$ gehen. Dies war schon früher bewiesen. Wir wissen aber jetzt auch, dass das Hyperboloid in diesen beiden Geraden von der Tangentialebene geschnitten wird.

Kehren wir nochmals zu dem Ausdruck BCz^2 zurück. Setzt man C gleich Null, so hat man die Gleichungen des elliptischen oder hyperbolischen Cylinders, für diesen kann also kein Schneiden durch die Tangentialebene erfolgen. Die Gleichung 4) für m aber wird:

$$(Ax_1 + By_1m)^2 = 0,$$

also es giebt nur einen Werth von m, die Berührung erfolgt in einer Geraden. Für die Kegelflächen ist dies, wie auch bei den Cylindern, an sich klar. Es wären nur noch die Paraboloide zu untersuchen. Deren Gleichungen schreiben wir unter der Form:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cz = 0,$$

und es ist:

$$Ax + C\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad By + C\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$A + C\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad B + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

und das Kriterium, ob ein Berühren oder Schneiden durch die Tangentialebene erfolgt, ist, dass 0 kleiner oder grösser als AB ist.

Es findet also bei positivem B Berühren, bei negativem B Schneiden statt. Ersteres geschieht für das elliptische, letzteres für das hyperbolische Paraboloid. Ist $x_1 y_1 z_1$ der Punkt, dessen Tangentialebene betrachtet wird, so hat man die Gleichung:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cz = 0, \quad Ax_1^2 + By_1^2 + 2Cz_1 = 0,$$

und für die Tangentialebene:

$$Ax_1 x + By_1 y + C(z + z_1) = 0;$$

aus diesen drei Gleichungen ergiebt sich:

$$A(x - x_1)^2 + B(y - y_1)^2 = 0,$$

oder

$$(x - x_1)\sqrt{A} = \pm (y - y_1)\sqrt{-B},$$

und aus den beiden letzten:

$$Ax_1(x - x_1) + By_1(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

welches in Verbindung mit der vorletzten Gleichung zwei Gerade ergiebt, wenn B negativ ist. Also das hyperbolische Paraboloid wird ebenfalls in zwei Geraden von der Tangentialebene geschnitten.

Das parabolische Paraboloid hat die Gleichung:

$$Ax^2 + 2By + 2Cz = 0,$$

also:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{Ax}{C}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{By}{C}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{A}{C}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Die Bedingungsgleichung wird hier $0 = 0$. Ein Schneiden findet nicht statt. Wie oben hat man:

$$Ax^2 + 2By + 2Cz = 0, \quad Ax_1^2 + 2By_1 + 2Cz_1 = 0,$$

für die Tangentialebene

$$Ax_1 x + B(y + y_1) + C(z + z_1) = 0,$$

woraus dann wie oben folgt:

$$A(x - x_1)^2 = 0,$$

also:

$$x - x_1 = \pm A \quad \text{und} \quad B(y + y_1) + C(z + z_1) = 0.$$

Das Berühren findet in einer Geraden statt.

§ 42.

Das Gesagte soll aber noch auf einige Flächen höheren Grades angewandt werden.

I. Es sei $(x - u)^2 + y^2 = \varrho^2$ und u gegeben durch die Gleichung $u^2 + z^2 = r^2$. Man erhält

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad (x - u)\frac{\partial u}{\partial y} = y$$

und hieraus:

$$z\frac{\partial z}{\partial x} = -u, \quad z\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{uy}{x-u};$$

ferner:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{r^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{yr^2}{z^3(x-u)}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2r^2(x-u) + uz^2\varrho^2}{z^3(x-u)^3},$$

also:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2r^4}{z^6(x-u)^2} - \frac{r^2[y^2r^2(x-u) + uz^2\varrho^2]}{z^6(x-u)^3}$$

$$= -\frac{u\varrho^2}{z^4(x-u)^3}.$$

Es findet Berühren oder Schneiden statt, je nachdem dieser Ausdruck kleiner oder grösser als Null ist, also u und $x - u$ gleiche oder ungleiche Zeichen haben, d. h. es findet Berührung in einem Punkte statt bei positivem x, wenn $u < x$, bei negativem x, wenn $u > x$ ist (beide algebraisch genommen).

Für $u = 0$ verschwindet unser Ausdruck:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Es ist dann $x^2 + y^2 = \varrho^2$, $z^2 = r^2$. Diese Gleichungen geben zwei Kreise mit Radius ϱ in der Entfernung $+r$ und $-r$ von der xy-Ebene. Also für $z = r$ und $z = -r$ findet ein Berühren der Tangentialebene in einem Kreise und kein Schneiden statt.

II. $z = x^3 + 3ax^2y + y^3 + b$, es sei a positiv.

Man hat

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6axy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3ax^2 + 3y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6(x + ay),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6ax, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y, \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 36(a^2x^2 - xy - ay^2).$$

Es findet also Berühren oder Schneiden statt, wenn a^2x^2 kleiner bezüglich grösser als $xy + ay^2$ ist, für $a^2x^2 - xy - ay^2 = 0$ wird Berührung in einer Curve stattfinden. Diese Curve aber besteht hier aus zwei Geraden, da unsere Gleichung zwei reelle constante Werthe für $\frac{y}{x}$ ergiebt. Diese Geraden schneiden sich in dem Punkte, wo $y = x = 0$, also $z = b$ ist.

Dies Berühren ist nach dem Vorigen aber so zu verstehen, dass die Tangentialebene, welche durch diese beiden Geraden geht, in der Umgebung derselben die Fläche nicht durchschneidet, wohl kann dies aber in irgend welcher Entfernung von den Geraden geschehen. Dies wird auch durch eine Ausnahme, die sich hier ergiebt, bestätigt. Setzt man nämlich $x = y = 0$, also $z = b$, so verschwinden die zweiten Differentialquotienten, nicht aber die dritten, und dies zeigt, dass in diesem Punkte kein Grenzwerth stattfindet, also die Tangentialebene die Fläche in der That schneidet. Die Schnittlinie wird, da $z = b$ die Gleichung der Tangentialebene ist, durch die cubische Gleichung: $x^3 + 3ax^2y + y^3 = 0$ erhalten, welche bei positivem a nur einen constanten und reellen Werth für $\frac{y}{x}$ giebt, das Durchschneiden also erfolgt in einer Geraden.

III. $z = a(x^4 + y^4) + b, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 4ax^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4ay^3,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12ax^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12ay^2.$$

Es erfolgt also hiernach ein Berühren oder Schneiden, je nachdem $0 \lesseqgtr a^2x^2y^2$ ist, das Erstere ist offenbar immer der Fall, wenn nicht $x = y = 0$ ist.

Für diesen Werth aber verschwinden die zweiten und auch die dritten Differentialquotienten; bilden wir also die vierten:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 24a, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 24a.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, so ist die Gleichung § 38, welche bestimmt, ob ein Grenzwerth oder nicht vorhanden sei: $p^4 + 1 = 0$, welche nur imaginäre Wurzeln hat. Die Berührung findet also überall in einem Punkte statt.

§ 43.

Unser Kriterium dafür, ob die Tangentialebene ihre Fläche schneidet oder nicht, gilt für die Form der Gleichung der Fläche $z = f(x, y)$. Ist jedoch die Gleichung in der Form $F(x, y, z) = 0$ gegeben, so ändert sich das Kriterium natürlich der Form nach.

Um dies neue Kriterium aufzustellen, setzen wir folgende Bezeichnungen für die Differentialquotienten der Function F fest:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = R$$

und die zweiten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = L, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = M, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = N,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z} = L', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial x} = M', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = N'.$$

Sei ferner:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Dann haben wir nur die Differentialquotienten p, q, r, s, t in diesen neuen Bezeichnungen auszudrücken und die Differenz $rt - s^2$ zu bilden.

Differentiiren wir zunächst die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ partiell nach x, so zwar, dass wir z als Function von x, und y als constant ansehen, so erhalten wir $P + R \cdot p = 0$ oder $p = -\frac{P}{R}$, und ebenso finden wir, wenn wir y als unabhängige Variable, z als Function von y und x als constant ansehen: $q = -\frac{Q}{R}$.

Differentiiren wir diese beiden Gleichungen nochmals in derselben Weise, wie vorhin $F = 0$, so finden wir $\frac{\partial p}{\partial x}$, d. i.

$$r = -\frac{R(L + M' \cdot p) - P(M' + N \cdot p)}{R^2} = -\frac{R\left(\frac{LR - M'P}{R}\right) - P\left(\frac{M'R - NP}{R}\right)}{R^2}$$

oder
$$-rR^3 = LR^2 - 2M'PR + NP^2.$$

Ebenso $\frac{\partial q}{\partial y}$, oder t. Man erhält dafür

$$-tR^3 = MR^2 - 2L'QR + NQ^2.$$

Endlich findet man $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = s$. Dafür hat man ähnlich

$$-sR^2 = N'R^2 - (M'Q + L'P)R + NPQ.$$

Bildet man nun $rt - s^2$, so findet man dafür

$$R^4(rt - s^2) = P^2(MN - L'^2) + Q^2(NL - M'^2) + R^2(LM - N'^2)$$
$$+ 2QR(M'N' - LL') + 2RP(N'L' - MM') + 2PQ(L'M' - NN').$$

Die Tangentialebene berührt also, wenn die rechte Seite dieser Gleichung $\geqq 0$ ist; ist sie < 0, so schneidet die Tangentialebene die Fläche.

Man kann die rechte Seite dieser Gleichung noch etwas bequemer fürs Gedächtniss schreiben. Es ist

$$\begin{vmatrix} L & N' & M' \\ N' & M & L' \\ M' & L' & N \end{vmatrix} = \varDelta = LMN - LL'^2 - MM'^2 - NN'^2 + 2L'M'N',$$

also wird

$$R^4(rt - s^2)$$

$$= P^2 \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial L} + Q^2 \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial M} + R^2 \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial N} + QR \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial L'} + RP \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial M'} + PQ \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial N'} \cdot$$

Die Durchführung dieser Betrachtung für den Fall, dass auch die zweiten Differentialquotienten verschwinden, würde sehr complicirte Formeln geben.

Discussion einer Fläche.

§ 44.

Die hier gegebene vollständige Theorie der Tangential-Ebenen und -Kegel gestattet jetzt, durch die Gleichung einer Fläche ihre Gestalt sowie ihre besonderen Punkte und Linien zu ermitteln. Für diese Discussion wählen wir als Beispiel eine Fläche vierten Grades, die in der Optik wichtige Wellenfläche der zweiaxigen Krystalle.

Die Gleichung derselben ist:

$$\frac{a^2x^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2y^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2z^2}{r^2 - z^2} = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

welche mit Hinweglassung des Factors r^2 auf die Gestalt gebracht werden kann:

I) $$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)$$
$$= a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(a^2 + c^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2 - a^2b^2c^2.$$

Diese Gleichung bleibt unverändert, wenn man bei beliebigen Grössen x, y, z das Vorzeichen ändert. Somit zerfällt die Fläche in acht congruente oder symmetrische Stücke, welche durch die Coordinatenebenen getrennt sind. Es ist also gestattet, nur das Stück zu betrachten, wo x, y, z positiv sind, was hier vorausgesetzt werden soll. Sei $a > b > c$. Wir bestimmen zunächst die Durchschnitte der Fläche mit den Coordinatenebenen. Sei $z = 0$, so ergiebt sich:

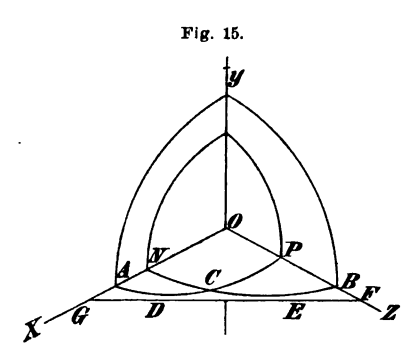
$$(x^2 + y^2 - c^2)(a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2) = 0$$

als Durchschnitt mit der xy-Ebene und Entsprechendes bezüglich für die yz- und xz-Ebene, also

$$(y^2 + z^2 - a^2)(b^2y^2 + c^2z^2 - b^2c^2) = 0,$$
$$(x^2 + z^2 - b^2)(a^2x^2 + c^2z^2 - a^2c^2) = 0,$$

d. h. jede der Coordinatenebenen wird in einer Ellipse und in einem Kreise geschnitten. Bei dem angenommenen Grössenverhältnisse von a, b, c unterscheiden sich aber diese Schnitte folgendermassen: In der xy-Ebene schliesst die Ellipse den Kreis ganz ein, in der yz-Ebene findet das Umgekehrte statt. In der xz-Ebene endlich schneiden sich Kreis und Ellipse. (Fig. 15.) Am wichtigsten ist die Betrachtung des Schnittes in der xz-Ebene. Hier ist zunächst der Schnittpunkt C und dann die gemeinschaftliche Tangente DE beider Curven zu ermitteln. Die Coordinaten von C ergeben sich aus den Gleichungen:

Fig. 15.



$$x^2 + z^2 = b^2, \quad a^2x^2 + c^2z^2 = a^2c^2;$$

man erhält

1) $$(a^2 - c^2)x^2 = c^2(a^2 - b^2)$$

und $$(a^2 - c^2)z^2 = a^2(b^2 - c^2).$$

Die Wurzelgrössen in x und z sind in dem hier betrachteten Gebiete positiv zu nehmen.

Für die Tangente DE ergeben sich, wenn x_1, z_1 die Coordinaten des Berührungspunktes für die Ellipse D, x_2, z_2 die für den Kreis E sind, die Gleichungen:

$$a^2xx_1 + c^2zz_1 = a^2c^2, \quad xx_2 + zz_2 = b^2,$$

also damit beide Gleichungen übereinstimmen, muss hier $c^2x_2 = b^2x_1$, $a^2z_2 = b^2z_1$ sein; also wenn man die Werthe von x_2 und z_2 in die Gleichung $x_2^2 + z_2^2 = b^2$ einsetzt:

$$b^2(a^4x_1^2 + c^4z_1^2) = a^4c^4.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung der Ellipse:

$$a^2x_1^2 + c^2z_1^2 = a^2c^2 \quad \text{giebt:}$$

$$b^2(a^2 - c^2)x_1^2 = c^4(a^2 - b^2), \quad b^2(a^2 - c^2)z_1^2 = a^4(b^2 - c^2),$$

also für Punkt D:

$$x_1 = \frac{c^2\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad z_1 = \frac{a^2\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{a^2 - c^2}},$$

wo alle Wurzeln das positive Zeichen haben, und für Punkt E:

$$x_2 = \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad z_2 = \frac{b\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Die Gleichung der gemeinschaftlichen Tangente DE aber wird:

2) $$x\sqrt{a^2 - b^2} + z\sqrt{b^2 - c^2} = b\sqrt{a^2 - c^2}.$$

Um den Verlauf der Fläche ausserhalb der Coordinatenebene xz zu bestimmen, suchen wir in dem Gebiete, wo x, y, z positiv sind, die Ordinate y. Wir lösen zu diesem Zwecke die Gleichung I) nach y^2 auf und erhalten:

II) $$y^2 = \frac{1}{2b^2}\left(k \pm \sqrt{k^2 + 4b^2lm}\right),$$

wo $$k = b^2(a^2 + c^2) - x^2(a^2 + b^2) - z^2(b^2 + c^2),$$
$$l = x^2 + z^2 - b^2, \quad m = -a^2x^2 - c^2z^2 + a^2c^2.$$

Damit y reell sei, muss zunächst $k^2 + 4b^2lm$ positiv, dann aber auch y^2 positiv sein. Beschäftigen wir uns zunächst mit der ersten Bedingung. Der Ausdruck $k^2 + 4b^2lm$ lässt sich leicht auf die Form bringen:

$$k^2 + 4b^2lm = \{(a^2 - b^2)x^2 - (b^2 - c^2)z^2 - b^2(a^2 - c^2)\}^2 - 4b^2(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)z^2$$

und dieser Ausdruck zerfällt in vier lineare Factoren:

III) $$k^2 + 4b^2lm = (\alpha x + \beta z + \gamma)(\alpha x + \beta z - \gamma)(\alpha x - \beta z + \gamma)(\alpha x - \beta z - \gamma),$$

wo gesetzt ist

$$\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \beta = \sqrt{b^2 - c^2}, \quad \gamma = b\sqrt{a^2 - c^2};$$

$\alpha, \beta, \gamma, x, z$ sind sämmtlich positiv. Damit das ganze Product positiv sei, muss, wie leicht zu sehen, entweder: A) $\alpha x - \beta z$ abgesehen vom Vorzeichen grösser als γ oder B) $\alpha x + \beta z$ kleiner als γ sein.

Denn nehmen wir im Falle A) zunächst an $\alpha x - \beta z$ sei positiv und grösser als γ, so ist auch $\alpha x + \beta z > \gamma$, also alle vier Factoren positiv, ist dagegen $\beta z - \alpha x$ positiv und grösser als γ, so sind die beiden letzten Factoren negativ, die beiden ersten positiv, also das Product positiv; im Falle B) aber ist je nachdem $\alpha x - \beta z$ positiv oder negativ ist, der zweite und vierte oder der zweite und dritte Factor negativ, die beiden anderen positiv.

Der Fall aber, wo $\alpha x + \beta z$ grösser als γ ist, bewirkt, dass die beiden ersten Factoren positiv sind, ist dann $\alpha x - \beta z$ positiv und kleiner als γ, so ist auch der dritte Factor positiv, der vierte aber negativ, und ist $\beta z - \alpha x$ positiv und kleiner als γ, so findet das Umgekehrte statt; in jedem Falle also würde sich ein negatives Resultat ergeben.

Die Gleichung $\alpha x + \beta z = \gamma$ nun ist die Gleichung 2), also die der Tangente DE. Es fragt sich nun, welches Gebiet der xz-Ebene durch die Bedingung $\alpha x + \beta z < \gamma$ dargestellt wird. Jede DE

parallele Linie hat zur Gleichung $\alpha x + \beta z = \delta$, und es sind bezüglich $\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ und $\frac{\delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ die vom Anfangspunkte O auf die betreffende Linie gefällten Lothe. Ist also $\delta < \gamma$, so erhält man den ganzen Flächenraum des Dreiecks GOF. Ebenso lassen sich leicht die Räume bestimmen, in welchen innerhalb des positiven Gebietes der xz-Ebene die Bedingung $\alpha x - \beta z > \gamma$ oder $\beta z - \alpha x > \gamma$ gilt.

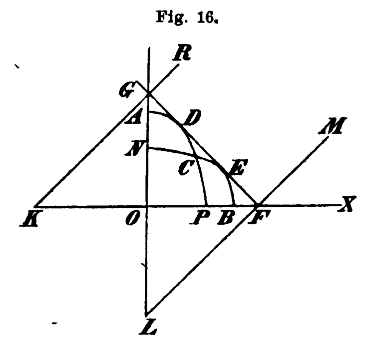


Fig. 16.

Nimmt man nämlich auf der negativen Verlängerung von OX (Fig. 16), $OK = OF$ und zieht die Gerade KGR, so ist deren Gleichung $\beta z - \alpha x = \gamma$, macht man ferner $OL = OG$ und zieht die Gerade LFM, so ist deren Gleichung $\alpha x - \beta z = \gamma$. Die Bedingung A) ist also im betrachteten Gebiete erfüllt innerhalb der Winkelräume ZGR und XFM, insoweit beiden Räumen Ordinaten y der Fläche angehören. Was nun das Vorzeichen von y^2 anbetrifft, so finden, immer eine der Bedingungen A) oder B) vorausgesetzt, folgende Fälle statt:

C) lm ist positiv, dann lehrt Gleichung II), dass es immer einen und nur einen positiven Werth von y^2 giebt. D) lm ist negativ und k positiv, dann giebt es zwei positive Werthe von y^2. E) lm und k sind negativ, dann hat y^2 keine positiven Werthe.

Nun ist lm positiv, wenn $x^2 + z^2 - b^2$ und $a^2c^2 - a^2x^2 - c^2z^2$ gleiche Vorzeichen haben, dies findet statt, wenn der Fusspunkt von y entweder ausserhalb der Ellipse aber innerhalb des Kreises, oder ausserhalb des Kreises und innerhalb der Ellipse sich befindet. Also damit ein und nur ein Schnittpunkt der positiven Ordinate y mit der Fläche stattfinde, muss diese Ordinate die xz-Ebene innerhalb der Räume $ADCN$ und $PBEC$ treffen; die Bedingung B) ist dann immer erfüllt, da diese Räume innerhalb des Dreiecks FOG sich befinden.

Soll lm negativ sein, so haben l und m ungleiche Zeichen und der Fusspunkt von y fällt dann entweder innerhalb oder ausserhalb von Ellipse und Kreis, also entweder in den Raum $NCPO$ oder auf die Seite von $ADCEB$, die von O getrennt ist. Um nun zu bestimmen, ob in diesen beiden Fällen zwei oder keine positiven Werthe von y^2 sich ergeben, ist zu untersuchen, wann k positiv oder negativ ist.

Nun stellt die Gleichung $k = 0$ eine zweite Ellipse dar und k

ist positiv, wenn der Fusspunkt von y innerhalb derselben, negativ wenn er ausserhalb derselben fällt.

Suchen wir nun die Schnittpunkte dieser Ellipse mit derjenigen, deren Gleichung $a^2x^2 + c^2z^2 - a^2c^2$ war, so ergeben sich deren Coordinaten aus den Gleichungen:

$$x^2(a^2 + b^2) + z^2(b^2 + c^2) = b^2(a^2 + c^2), \quad a^2x^2 + c^2z^2 = a^2c^2.$$

Wir erhalten für x und z die vorhin gefundenen Werthe x_1 und z_1, und ebenso ergeben sich für die Schnittpunkte derselben mit dem Kreise die Werthe x_2 und z_2, woraus dann folgt, dass die Tangente DE Sehne der zuletzt gefundenen Ellipse ist. Da nun diese Sehne das Gebiet, wo k positiv ist, abschliesst, so ergiebt sich folgendes Resultat.

Die positive Ordinate y schneidet die Fläche in einem Punkte, wenn ihr Fusspunkt in den Gebieten $ADCN$ oder $CPBE$ liegt; sie schneidet die Fläche zweimal in dem Gebiete, welches zu $ONCP$, das von Ellipse und Kreis begrenzt ist und zu dem Dreieck DCE gehört, sonst aber überhaupt nicht. Die Fläche ist also völlig geschlossen, liegt auf jeder Seite der xz-Ebene zum Theil einfach, zum Theil zweifach über derselben. Immer setzt das Vorhandensein eines reellen Werthes von y die Erfüllung der Bedingung B) $\alpha x + \beta z < \gamma$ voraus, da die Bedingung A) nur ausserhalb des fraglichen Gebietes stattfindet. Selbstverständlich schneidet die Ordinate y die ganze Fläche in diesem Gebiete zwei bezüglich vier Mal, wenn man auch die negativen y berücksichtigt.

Suchen wir noch die Werthe von y auf der Grenze des betrachteten Gebietes. Auf dem Kreise $l = 0$ oder der Ellipse $m = 0$ erhält man bezüglich $y^2 = 2k$ und $y^2 = 0$. Der erste Werth giebt reelles y, nur wenn k positiv ist; dies findet auf der Strecke DCE statt, auf den Strecken AD und BE dagegen ist k negativ, da diese Strecken von unserer zweiten Ellipse, deren Gleichung $k = 0$ war, nicht eingeschlossen werden. Auf der Geraden DE nun war $\alpha x + \beta z = \gamma$, also $k^2 + 4b^2lm = 0$, $2b^2y^2 = k$ hat also nur einen und zwar positiven Werth. Die von DE ausgehenden Ordinaten y bilden nun eine Ebene, die auf der Ebene xz senkrecht steht, diese Ebene wird eine Tangentialebene der Fläche sein, da hier zwei Werthe von y in einen übergehen, wenn nicht etwa die Punkte, in welchen unsere Fläche von dieser Ebene getroffen wird, eine Kante derselben bilden sollten. Es soll dies sofort untersucht werden. Bestimmen wir aber zunächst die Curve, welche Ebene und Fläche gemein haben. Die Gleichungen $2b^2y^2 = k$ und $\alpha x + \beta z = \gamma$, d. h.

$$2b^2y^2 = b^2(a^2 + c^2) - (a^2 + b^2)x^2 - (b^2 + c^2)z^2$$

und $$\sqrt{b^2 - c^2}\cdot z = b\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - b^2}\cdot x$$

ergeben, wenn man die letztere quadrirt und zu der ersten addirt:

$$b(x^2 + y^2 + z^2) = ba^2 - \sqrt{a^2 - c^2}\sqrt{a^2 - b^2}\cdot x,$$

also die Gleichung einer Kugel. Der Durchschnitt derselben und der Ebene $\alpha x + \beta z = \gamma$ ist ein Kreis, also: Die durch DE gelegte auf der Ebene xz senkrechte Ebene trifft die Fläche in einem Kreise, dessen Durchmesser DE ist. Letzteres ergiebt sich schon aus der Symmetrie der Theile der Fläche über und unter der xz-Ebene.

Um nun noch zu sehen, ob diese Ebene in der That eine Tangentialebene sei, stellen wir direct die Frage: für welche Punkte der Fläche steht die Tangentialebene auf der Ebene xz senkrecht? Die durch Punkt xz gehende Tangentialebene hat die Gleichung:

$$\zeta - z = \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y),$$

soll sie also auf xz senkrecht stehen, so muss $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ sein. Wir differentiiren jetzt die Flächengleichung I), indem wir $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ setzen. Wir erhalten:

III) $$pz((a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + c^2)y^2 + 2c^2z^2 - c^2(a^2 + b^2))$$
$$= x(a^2(b^2 + c^2) - 2a^2x^2 - (a^2 + b^2)y^2 - (a^2 + c^2)z^2),$$
$$qz((a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + c^2)y^2 + 2c^2z^2 - c^2(a^2 + b^2))$$
$$= y(b^2(a^2 + c^2) - (a^2 + b^2)x^2 - (b^2 + c^2)z^2 - 2b^2y^2).$$

Für $q = 0$ hat man nun entweder $y = 0$, d. h. in jedem Punkte der Schnittlinie mit der xz-Ebene steht die Tangentialebene auf derselben senkrecht, ein Resultat, welches vorauszusehen war, oder

$$b^2(a^2 + c^2) - (a^2 + b^2)x^2 - (b^2 + c^2)z^2 = 2b^2y^2, \text{ d. h. } y^2 = \frac{k}{2b^2},$$

woraus sich dann mit Hilfe der Gleichung II) $k^2 + 4b^2lm = 0$ ergiebt, was nur möglich ist, wenn $\alpha x + \beta z - \gamma = 0$ ist (da die Gleichungen $\alpha x - \beta z = \gamma$ und $\alpha x - \beta z = -\gamma$ nur auf den Linien FM und GR also ausserhalb des fraglichen Gebietes stattfinden, die Gleichung $\alpha x + \beta z = -\gamma$ aber unmöglich ist). Diese Gleichungen $\alpha x + \beta z = \gamma$ und $y^2 = \frac{k}{2b^2}$ sind die des eben betrachteten Kreises, also: Die durch DE gelegte, auf xz senkrechte Ebene berührt die Fläche nicht in einem oder in einzelnen Punkten, sondern in einem Kreise. Die Betrachtung der zweiten Differentialquotienten, welche

bei dieser Frage sonst Platz greifen müsste, kann, da dies Resultat feststeht, erspart werden.

Noch kommt der Punkt C in Betracht, durch welchen zwei in der xz-Ebene befindliche Tangenten, also jedenfalls wenigstens zwei Tangentialebenen oder ein Tangentialkegel gehen. In beiden Fällen muss, wie § 31 gezeigt wurde, wenigstens eine der Grössen p und q die Form $\frac{0}{0}$ annehmen.

Wir bedienen uns der Methode des bezeichneten Paragraphen, indem wir aber statt der daselbst gebrauchten Buchstaben α, β, γ, denen wir hier eine andere Bedeutung gegeben haben, andere einführen. Demgemäss sei

$$\frac{dy}{dx} = m \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial x} + m\frac{\partial z}{\partial y} = p + mq = s,$$

dann ist die Gleichung einer durch Punkt xyz gehenden Tangente:

$$\xi - x = \frac{\eta - y}{m} = \frac{\zeta - z}{s}, \quad \text{also } m = \frac{\eta - y}{\xi - x}, \; s = \frac{\zeta - z}{\xi - x},$$

da für den Punkt C $y = 0$ ist. Unter dieser Bedingung giebt die Gleichung $p = \frac{0}{0}$:

F) $\quad (a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + c^2)y^2 + 2c^2z^2 - c^2(a^2 + b^2) = 0$

und $\quad a^2(b^2 + c^2) - 2a^2x^2 - (a^2 + b^2)y^2 - (a^2 + c^2)z^2 = 0,$

da der Fall, wo x oder z gleich Null sind, hier ausgeschlossen ist. Wegen $y = 0$ nimmt dann auch q den Werth $\frac{0}{0}$ an; aus den Gleichungen F) ergeben sich sofort aber für x und z durch Addition: $x^2 + z^2 = b^2$, und hieraus $a^2x^2 + c^2z^2 = a^2c^2$, also die Coordinaten des Punktes C. Um nun die wahren Werthe von p und q zu finden, differentiiren wir die Gleichungen III) nach x, indem wir y als Function von x denken, lassen dabei alle mit y oder den linken Seiten der Gleichungen F) multiplicirten Glieder weg. Wir erhalten:

$$pz((a^2 + c^2)x + 2c^2zs) = -x(2a^2x + (a^2 + c^2)zs),$$

$$qz((a^2 + c^2)x + 2c^2zs) = m(b^2(a^2 + c^2) - (a^2 + b^2)x^2 - (b^2 + c^2)z^2),$$

oder wenn wir die zweite Gleichung mit m multipliciren und zur ersten addiren:

$$2c^2z^2s^2 + 2(a^2 + c^2)xzs$$
$$= m^2(b^2(a^2 + c^2) - (a^2 + b^2)x^2 - (b^2 + c^2)z^2) - 2a^2x^2,$$

und wenn man für s und m ihre Werthe setzt: $\frac{\eta}{\xi - x}$, $\frac{\zeta - z}{\xi - x}$:

$$2c^2(\zeta - z)^2z^2 + 2(a^2 + c^2)xz(\zeta - z)(\xi - x)$$
$$= \eta^2(b^2(a^2 + c^2) - (a^2 + b^2)x^2 - (b^2 + c^2)z^2) - 2a^2x^2(\xi - x)^2.$$

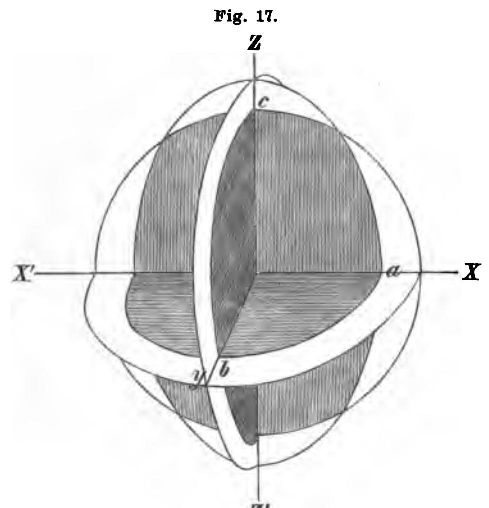
Dies ist offenbar die Gleichung eines Kegels zweiten Grades, sie nimmt, wenn man den Anfangspunkt in den Punkt C verlegt, also $\xi - x$ und $\zeta - z$ durch ξ und ζ ersetzt und in dem Factor von η^2 die Grössen x und z durch ihre Werthe, nämlich durch die Coordinaten von C ersetzt, die einfachere Gestalt an:

$$2c^2z^2\zeta^2 + 2(a^2 + c^2)xz\xi\zeta + 2a^2x^2\xi^2 = \eta^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2).$$

In Punkt C wird also die Fläche von einem Kegel berührt.

Setzen wir noch $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial y}{\partial z} = 0$, um die Grenzwerthe von y zu bestimmen, so haben wir, um diese Differentialquotienten zu bestimmen, in den Gleichungen III) y mit z zu vertauschen. Es ergeben sich dann: entweder 1) die Gleichungen F), oder 2) die erste Gleichung F) und $x = 0$, oder 3) die zweite Gleichung F) und $z = 0$, oder 4) $x = 0$ und $z = 0$. Im letzteren Falle ist $y^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2) \pm \frac{1}{2}(a^2 - c^2)$, also entweder $y = a$ oder $y = c$, beides sind Maxima, da y von Null an bis zum bezeichneten Punkte wächst; die Bedingungen 2 und 3 würden nur imaginäre Werthe ergeben, Bedingung 1 aber gäbe mit Hülfe der Gleichung der Fläche wieder wie vorauszusehen $y = 0$ und für x und z die Coordinaten des Punktes C. In diesem Punkte findet zwar nicht für y, aber für y^2 als Function von x^2 gedacht ein Minimum statt. Es ist nämlich leicht zu sehen, dass dieser Annahme noch die Bedingung 1) entspricht. Somit haben wir, wenn wir auch die sieben übrigen Theile unserer Fläche einschliessen, dass Resultat: Die Fläche besteht aus zwei übereinander liegenden, sonst getrennten Theilen, die sich nur in vier Punkten, welche C entsprechen, vereinigen; in diesen Punkten wird die Fläche von Kegeln berührt, und die Durchschnitte der beiden Theile der Fläche mit der xz-Ebene, welche einen Kreis und eine Ellipse bilden, haben eine gemeinschaftliche Tangente, diese liegt in einer auf der xz-Ebene senkrechten Ebene, welche die Fläche in einem Kreise berührt. Solcher Kreise sind also vier vorhanden. Die beigefügte Fig. 17 giebt die vollständigen Schnitte der Fläche mit den Coordinatenebenen.

Fig. 17.



Die Normalen der Fläche.

§ 45.

Normale einer Fläche heisst diejenige Gerade, welche durch den Berührungspunkt geht und auf der Tangentialebene senkrecht steht.

Seien λ, μ, ν die Cosinus der Winkel der Normale mit den Axen, ξ, η, ζ wieder die laufenden Coordinaten, x, y, z die des Berührungspunktes, so sind also die Gleiehungen der Normale:

$$1)\qquad \frac{\xi - x}{\lambda} = \frac{\eta - y}{\mu} = \frac{\zeta - z}{\nu} = p,$$

wo p die Entfernung des Punktes $\xi\eta\zeta$ vom Berührungspunkte ist.

Ist die Gleichung der Fläche $F(x, y, z) = 0$ oder $z = f(x, y)$, so ergiebt sich aus der Gleichung der Tangentialebene:

$$\lambda = M\frac{\partial F}{\partial x} = N\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \mu = M\frac{\partial F}{\partial y} = N\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\nu = M\frac{\partial F}{\partial z} = -N \text{ und } M^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2,$$

$$N^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Auch bei den Flächennormalen ergiebt sich ein wesentlicher Unterschied gegen die Normalen der Curven einfacher Krümmung. Jede continuirliche Schaar von Geraden in der Ebene kann nämlich als Normalenschaar von unendlich vielen Curven betrachtet werden. Die Schnittpunkte je zweier aufeinander folgenden Geraden bestimmen nämlich eine Curve, deren sämmtliche Evolventen die Geraden zu Normalen haben. Betrachten wir dagegen eine Schaar continuirlich aufeinander folgender, aber einen körperlichen Raum ausfüllender Geraden, so ist, wie sogleich gezeigt werden soll, eine Bedingung nöthig, damit dieselben sämmtliche Normalen einer Fläche sind. Ist diese Bedingung aber erfüllt, so giebt es unendlich viele solcher Flächen, welche man gewöhnlich als Parallelflächen bezeichnet.

Seien nämlich wieder λ, μ, ν die Cosinus der Winkel, welche eine Gerade aus der Schaar mit den Axen macht, u, v, w die Coordinaten eines gegebenen Punktes dieser Geraden, so sind die Gleichungen dieser Geraden:

$$2)\qquad \frac{x - u}{\lambda} = \frac{y - v}{\mu} = \frac{z - w}{\nu}.$$

Damit aber eine Schaar solcher Geraden einen körperlichen Raum ausfülle, müssen die Grössen $u, v, w, \lambda, \mu, \nu$ als Functionen zweier Variablen gegeben sein. Als solche kann man z. B. die Grössen u und v selbst annehmen; ist w durch diese Grössen bestimmt, so hat man die Gleichung einer Fläche, auf welcher der Punkt u, v, w

zu nehmen ist, λ, μ müssen dann irgendwie in u und v gegeben sein, wo dann auch ν durch die Gleichung $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ bestimmt ist. Wählt man als diese Fläche die xy-Ebene, so ist $w = 0$. Damit nun diese Linienschaar auf einer Fläche senkrecht steht, muss die Gleichung:

3) $$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0$$

erfüllt sein, wo x, y, z die Coordinaten der letzteren Fläche sind, und zugleich die Gleichungen 2) stattfinden. Durch diese beiden Gleichungen aber kann man u und v und folglich auch λ, μ, ν als Function von x, y, z bestimmen, (da λ, μ, ν in u und v gegeben sind). Setzt man nun für λ, μ, ν die oben gefundenen Werthe:

$$M\frac{\partial F}{\partial x}, \quad M\frac{\partial F}{\partial y}, \quad M\frac{\partial F}{\partial z},$$

so ergiebt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

oder $dF = 0$, $F = c$. Es muss also die Gleichung 3) durch Integration eine Gleichung zwischen x, y, z ergeben und diese Gleichung ist die der gesuchten Fläche; da ferner c willkürlich ist, so giebt es unendlich viel solcher Flächen. Die Bedingung, dass die Gleichung 3) integrirbar ist, lässt sich nun bekanntlich folgendermassen ausdrücken. Es ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\nu}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\mu}{\nu},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$$

oder:

$$\nu\frac{\partial \lambda}{\partial y} - \lambda\frac{\partial \nu}{\partial y} = \nu\frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu\frac{\partial \nu}{\partial x},$$

und dies ist die Bedingungsgleichung, damit die Schaar von Geraden auf einer Fläche normal steht.

Dieser Bedingungsgleichung lässt sich aber auch eine andere Form geben. Nehmen wir nämlich an, dass λ, μ, ν nicht durch x, y, z ausgedrückt, sondern nur durch u und v gegeben sind.

Die Gleichung 3) lässt sich dann wegen 2) auch schreiben:

4) $$(x - u)dx + (y - v)dy + (z - w)dz = 0.$$

Sei nun p wieder die Entfernung des Punktes (xyz) auf der gesuchten Fläche von Punkt (u, v, w) auf der gegebenen, so ist:

$$p^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2,$$

$$pdp = (x - u)(dx - du) + (y - v)(dy - dv) + (z - w)(dz - dw),$$

also wegen Gleichung 4):

$$pdp + (x - u)du + (y - v)dv + (z - w)dw = 0,$$

oder da $x - u = p\lambda$, $y - v = p\mu$, $z - w = p\nu$ ist:

$$dp = -\lambda du - \mu dv - \nu dw.$$

Da nun w als Function von u und v gegeben ist, so schreibt sich diese Gleichung:

5) $$dp = -\left(\lambda + \nu \frac{\partial w}{\partial u}\right) du - \left(\mu + \nu \frac{\partial w}{\partial v}\right) dv,$$

eine Gleichung, aus der sich p durch Integration als Function von u und v ergiebt. Die Bedingung, dass dies möglich sei, erhält man wie oben:

$$-\frac{\partial p}{\partial u} = \lambda + \nu \frac{\partial w}{\partial u}, \quad -\frac{\partial p}{\partial v} = \mu + \nu \frac{\partial w}{\partial v},$$

d. h. falls eine Schaar von Geraden einer Fläche normal sein soll, müssen die Ausdrücke

$$\lambda + \nu \frac{\partial w}{\partial u}, \quad \mu + \nu \frac{\partial w}{\partial v}$$

partielle Differentialquotienten einer Grösse p sein. Diese Bedingung lässt sich auch schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\lambda + \nu \frac{\partial w}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\mu + \nu \frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

oder:

6) $$\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \nu}{\partial v} = \frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \nu}{\partial u}.$$

Wählt man als Fläche (u, v, w) die xz-Ebene, so hat man einfach:

$$-dp = \lambda du + \mu dv.$$

Soll zu der gegebenen Normalenschaar die Fläche bestimmt werden, so hat man die Gleichungen:

$$-p = \int (\lambda du + \mu dv + \nu dw)$$

und $$p = \frac{x-u}{\lambda} = \frac{y-v}{\mu} = \frac{z-w}{\nu}.$$

Da λ, μ, v, w und wegen der ersten Gleichung auch p als Functionen von u und v gegeben sind, so kann man aus den drei letzten Gleichungen durch Elimination von u und v die Beziehung zwischen x, y und z, welche eine willkürliche Constante enthält, finden. Aus der allgemeineren Gleichung 5) ergiebt sich noch ein geometrischer Satz.

Ist nämlich die Fläche u, v, w auch eine auf der gegebenen Linienschaar normale, und $d\sigma$ das Bogenelement irgend einer auf derselben befindlichen Curve, so sind $\frac{du}{d\sigma}, \frac{dv}{d\sigma}, \frac{dw}{d\sigma}$ die Cosinus der Winkel, welche die Tangente dieser Curve mit den Axen macht, dann hat man also, in welcher Richtung dieselbe auch auf der Fläche angenommen ist,

$$\lambda \frac{du}{d\sigma} + \mu \frac{dv}{d\sigma} + \nu \frac{dw}{d\sigma} = 0,$$

d. h. $p = \text{const}$. Also: Die Länge des Stücks der Normale zweier Parallelflächen, welches von denselben begrenzt ist, bleibt constant für die ganze Ausdehnung beider Flächen.

Uebrigens lässt sich diese Eigenschaft leicht geometrisch beweisen, und umgekehrt daraus die Formel 5) finden, aus der sich dann leicht die Formel 2) ergiebt. Seien nämlich BD und AC (Fig. 17 a) Bogen zweier Flächen, für die AB und CD aufeinander folgende Normalen sind, also Winkel $BAC = B = R$, Winkel $ABC = h$, $DCB = k$, so ist:

Fig. 17 a. Fig. 17 b.

$$BC = \frac{AB}{\cos h}, \quad DC = \frac{AB \cos k}{\cos h},$$

oder, da h und k verschwindend klein sind:

$$DC = AB\left(1 + \frac{h^2 - k^2}{2}\right), \; DC - AB = dp = \frac{p(h^2 - k^2)}{2}$$

und da h^2 und k^2 unendlich klein zweiter Ordnung sind, mit Hinweglassung der unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung, $p = \text{const}$. Sei jetzt wieder (Fig. 17b) die Fläche (uvw), also auch Bogen $AC = d\sigma$ beliebig genommen, CE senkrecht auf AB, so ist $AE = -dp = d\sigma \cos\vartheta$, wo $\vartheta = \sphericalangle BAC$ ist.

Aber: $$\cos\vartheta = \lambda\frac{du}{d\sigma} + \mu\frac{dv}{d\sigma} + \nu\frac{dw}{d\sigma},$$

also $dp = -\lambda du - \mu dv - \nu dw$ wie oben.

u und v sind als von einander unabhängig zu betrachten, da der Bogen $d\sigma$ in beliebiger Richtung, also ohne Rücksicht auf irgend welche Beziehung zwischen u und v zu nehmen ist.

Digression auf ein optisches Problem.

§ 46.

Die Bedingung, unter welcher eine Schaar von Geraden Normalen einer Fläche giebt, soll hier noch auf ein optisches Problem angewandt werden. Wenn (Fig. 18) ein Lichtstrahl AB in B auf eine brechende Fläche fällt, so wird bekanntlich der gebrochene Strahl, welcher die Verlängerung von BC sein soll, mit AB und der durch B gelegten Normale BD in eine Ebene fallen, und die Sinus der Winkel ABD und CBD werden ein constantes Verhältniss haben, also wenn $ABD = \vartheta$, $CBD = \tau$ ist: $\sin\tau = n \sin\vartheta$. Wird der Strahl nicht gebrochen, sondern zurückgeworfen, so findet noch immer die erste Bedingung statt und der Winkel des einfallenden Strahles mit der Normale ist gleich dem reflectirten mit derselben, eine Bedingung,

Fig. 18.

die der Formel $\sin \tau = - \sin \vartheta$ entspricht, also einen besonderen Fall des Brechungsproblems bildet, wenn man $n = -1$ setzt. Wenigstens findet dies für die Rechnung statt, wenn auch im Falle der Brechung n immer positiv ist.

Möge nun eine Schaar von Strahlen auf eine brechende oder spiegelnde Fläche fallen und suchen wir aus den Gleichungen dieser Strahlen die der reflectirten oder gebrochenen. Seien u, v, w die Coordinaten der brechenden Fläche, deren Gleichung gegeben ist, u_1, v_1, w_1 die einer ebenfalls gegebenen, sonst beliebigen Fläche, welche die einfallenden Strahlen schneidet, x, y, z die laufenden Coordinaten eines Strahles, a, b, c die Cosinus der Winkel desselben mit den Axen, so hat man als Gleichung dieses Strahles $\frac{x - u_1}{a} = \frac{y - v_1}{b} = \frac{z - w_1}{c}$. Und damit diese Gleichung eine Schaar ergebe, müssen a, b, also auch c als Functionen von u_1 und v_1 irgendwie gegeben sein. Da aber der Strahl auch durch die Fläche (uvw) geht, hat man:

$$\frac{u - u_1}{a} = \frac{v - v_1}{b} = \frac{w - w_1}{c},$$

und diese Gleichungen gestatten u_1, v_1, w_1, also auch a, b, c als Functionen von u und v zu betrachten. Suchen wir jetzt die Gleichungen des reflectirten oder gebrochenen Strahles, seien a_1, b_1, c_1 die Cosinus der Winkel desselben mit den Axen, dann sind diese Gleichungen:

$$\frac{x - u}{a_1} = \frac{y - v}{b_1} = \frac{z - w}{c_1}.$$

Sind ferner die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Fläche (uvw) im Einfallspunkte mit den Axen macht, λ, μ, ν, so hat man:

$$\cos \vartheta = \lambda a + \mu b + \nu c, \quad \cos \tau = \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1.$$

Berechnen wir aber jetzt die Sinus dieser Winkel:

$$\cos \vartheta^2 = \lambda^2 a^2 + \mu^2 b^2 + \nu^2 c^2 + 2\lambda\mu ab + 2\lambda\nu ac + 2\mu\nu bc.$$

Ersetzt man in den ersten drei Gliedern aber bezüglich:

λ^2 durch $1 - \mu^2 - \nu^2$, μ^2 durch $1 - \lambda^2 - \nu^2$, ν^2 durch $1 - \lambda^2 - \mu^2$,

so erhält man:

$$\cos \vartheta^2 = 1 - (\mu c - \nu b)^2 - (\nu a - \lambda c)^2 - (\lambda b - \mu a)^2,$$

$$\sin \vartheta^2 = (\mu c - \nu b)^2 + (\nu a - \lambda c)^2 + (\lambda b - \mu a)^2,$$

und ebenso

$$\sin \tau^2 = (\mu c_1 - \nu b_1)^2 + (\nu a_1 - \lambda c_1)^2 + (\lambda b_1 - \mu a_1)^2.$$

Die Bedingung aber, dass der einfallende und der gebrochene Strahl, sowie das Einfallsloth in einer Ebene liegen, lautet, wenn l, m, n die Cosinus der Winkel sind, welche das Loth auf diese Ebene mit den Axen macht:

$$la + mb + nc = 0, \quad la_1 + mb_1 + nc_1 = 0, \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0,$$

oder, wenn man l, m, n eliminirt:

$$1) \qquad \mu c_1 - \nu b_1 = T(\mu c - \nu b), \quad \nu a_1 - \lambda c_1 = T(\nu a - \lambda c),$$
$$\lambda b_1 - \mu a_1 = T(\lambda b - \mu a),$$

wo T noch zu bestimmen ist.

Setzt man aber diese Werthe in die Gleichung: $\sin \tau^2 = n^2 \sin \vartheta^2$, wo $\sin \tau^2$ und $\sin \vartheta^2$ durch die eben gefundenen Ausdrücke zu ersetzen sind, so ergiebt sich:

$$\sin \tau^2 = T^2 \sin \vartheta^2, \quad T = \pm n.$$

Das Vorzeichen bestimmt sich leicht, wenn man den besonderen Fall betrachtet, wo das Einfallsloth die z-Axe ist, und der einfallende Strahl sich in der Ebene yz befindet; dann ist nämlich $\lambda = \mu = 0$, $\nu = 1$, $a = 0$, $\sin \tau = b_1$, $\sin \vartheta = b$, also $b_1 = Tb$ und $T = + n$.

Es lassen sich nun leicht die Gleichungen des gebrochenen Strahles finden. Setzt man nämlich in den Gleichungen 1) $T = n$, so erhält man:

$$\frac{a_1 - na}{\lambda} = \frac{b_1 - nb}{\mu} = \frac{c_1 - nc}{\nu} \quad \text{oder:}$$

$$2) \qquad a_1 = S\lambda + na, \quad b_1 = S\mu + nb, \quad c_1 = S\nu + nc,$$

wo wir S bestimmen, indem wir diese Gleichungen bezüglich mit λ, μ, ν multipliciren und addiren. Man erhält:

$$S = \cos \tau - n \cos \vartheta = \sqrt{1 - n^2 \sin \vartheta^2} - n \cos \vartheta.$$

Da $\cos \vartheta$ und a, b, c als Functionen von u und v gegeben sind, so findet dies auch mit a_1, b_1, c_1 statt und die Gleichung

$$\frac{x - u}{a_1} = \frac{y - v}{b_1} = \frac{z - w}{c_1}$$

löst unsere Aufgabe.

Man hat aber bekanntlich: $\lambda : \mu : \nu = \frac{\partial w}{\partial u} : \frac{\partial w}{\partial v} : -1$ und hiernach nehmen die Gleichungen 2) auch die Form an:

$$3) \quad a_1 + c_1 \frac{\partial w}{\partial u} = n\left(a + c\frac{\partial w}{\partial u}\right), \quad b_1 + c_1 \frac{\partial w}{\partial v} = n\left(b + c\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

Nehmen wir nun an, die Ausdrücke in der Klammer rechts wären die partiellen Differentialquotienten einer Grösse, d. h. die Strahlen wären Normalen einer Fläche (vergleiche § 45 Formel 5 und 6), so findet letzteres und folglich auch ersteres mit den Ausdrücken links statt. D. h. „Ist ein Büschel Lichtstrahlen einer Fläche normal, so findet dies in Bezug auf eine andere Fläche noch bei jeder Brechung und Spiegelung dieser Strahlen, also auch bei beliebigen Brechungen und Spiegelungen statt.“ Offenbar ist dies beispielsweise der Fall, wenn die

Strahlen von einem Punkte ausgehen, da sie dann einer Kugel normal sind. Dieser Satz rührt von Malus her. Noch ist zu bemerken, dass die Gleichung derjenigen Fläche, welcher die gebrochenen Strahlen normal sind, ohne weitere Integration gefunden werden kann, wenn man diejenige Fläche kennt, der die ursprünglichen Strahlen normal sind. Sind nämlich u_1, v_1, w_1 die Coordinaten dieser Fläche, p die Länge eines Strahles zwischen dieser und der brechenden Fläche, also:

$$\frac{u_1 - u}{a} = \frac{v_1 - v}{b} = \frac{w_1 - w}{c} = p,$$

$$-dp = adu + bdv + cdw,$$

ferner p_1 die Länge der gebrochenen Strahlen zwischen der ihnen normalen und der brechenden Fläche, also wenn x, y, z die Coordinaten der ersteren sind:

$$\frac{x - u}{a_1} = \frac{y - v}{b_1} = \frac{z - w}{c_1} = p_1,$$

$$-dp_1 = a_1du + b_1dv + c_1dw,$$

so geben die Gleichungen 3), wenn man die erste mit du, die zweite mit dv multiplicirt und addirt:

$$dp_1 = ndp, \quad p_1 = np + e,$$

wo e eine willkürliche Constante ist.

Da nun $a, b, c, w_1, u_1, v_1, w$ und wegen der Gleichungen 2) auch a_1, b_1, c_1 als Functionen von u und v gegeben sind, so reichen die Gleichungen:

$$p_1 = np + e$$

oder
$$\frac{x - u}{a_1} = \frac{y - v}{b_1} = \frac{z - w}{c_1} = \frac{n(w_1 - w)}{c} + e$$

aus, um nach Elimination von u und v die Gleichung der Normalfläche zu finden.

Beispiel. Die brechende Fläche sei eine Ebene, der xy-Ebene parallel, ihre Gleichung also $w = w_0$, die Strahlen mögen von einem Punkte, der Anfangspunkt der Coordinaten sein soll, ausgehen, es ist dann:

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0, \quad \frac{u}{a} = \frac{v}{b} = \frac{w_0}{c} = p,$$

$$\frac{x - u}{a_1} = \frac{y - v}{b_1} = \frac{z - w_0}{c_1} = p_1, \quad \lambda = \mu = 0, \quad \nu = 1,$$

also wegen der Gleichungen 2) $a_1 = na, \quad b_1 = nb$. Also:

$$a = -\frac{u}{p}, \quad b = -\frac{v}{p}, \quad c = -\frac{w_0}{p}, \quad p^2 = u^2 + v^2 + w_0{}^2,$$

$$a_1 = -\frac{nu}{p}, \quad b_1 = -\frac{nv}{p}, \quad c_1{}^2 = \frac{p^2 - n^2u^2 - n^2v^2}{p^2},$$

oder: $$c_1^2 = \frac{(1-n^2)u^2 + (1-n^2)v^2 + w_0^2}{p^2}.$$

Die Gleichung $p_1 = np + e$ giebt dann:

$$-\frac{x-u}{nu} = -\frac{y-v}{nv} = -\frac{z-w_0}{\sqrt{(1-n^2)u^2 + (1-n^2)v^2 + w_0^2}} = +n + \frac{e}{p}.$$

Aus den beiden ersten Ausdrücken ergiebt sich:

$$u = mx, \quad v = my,$$

wo m eine zu bestimmende Grösse ist, und:

$$\frac{m-1}{nm} = \frac{z-w_0}{\sqrt{m^2(1-n^2)(x^2+y^2) + w_0^2}} = +n + \frac{e}{\sqrt{m^2(x^2+y^2) + w_0^2}}.$$

Dies sind zwei Gleichungen, aus denen m eliminirt werden kann; da die Gleichung, welche hieraus entsteht, nur z und $x^2 + y^2$ enthält, so hat man eine durch Drehung um die z-Axe entstandene Rotationsfläche; deren giebt es unendlich viele, da e beliebig ist. Setzt man, um eine dieser Flächen zu bestimmen, $e = 0$, so wird m constant: $m = \frac{1}{1-n^2}$, und die Gleichung der Fläche lautet:

$$n^2(x^2 + y^2) + n^2(1-n^2)w_0^2 = (1-n^2)(z-w_0)^2.$$

Dies ist die Gleichung eines Rotationshyperboloids oder Rotationsellipsoids, je nachdem n kleiner oder grösser als Eins ist.

Osculation der Flächen.

§ 47.

Ebenso wie bei den Curven kann man auch bei den Flächen den Begriff der Osculation einführen.

Sei $z = f(x, y)$ die Gleichung einer gegebenen Fläche, $z = f_1(x, y)$ die einer zweiten, und möge diese letztere mit der gegebenen einen Punkt gemein haben. Es muss dann für einen bestimmten Werth von x und einen solchen von y der aus beiden Gleichungen gezogene Werth von z übereinstimmen. Dies kann bewirkt werden, wenn die Gleichung $z = f(x, y)$ eine Constante enthält, welche sich demgemäss bestimmen lässt.

Eine Osculation erster Ordnung findet nun dann statt, wenn jede durch den so bestimmten Punkt (x, y, z) in der ersten Fläche gelegte Curve einen benachbarten Punkt mit der gegebenen Fläche gemein hat, eine solche Osculation erster Ordnung hat also z. B. mit einer Fläche die Tangentialebene.

Eine Osculation n^{ter} Ordnung aber nennen wir ein solches Verhalten beider Flächen, wo ausser dem gegebenen Punkte (x, y, z)

noch n ihm benachbarte für jede durch die erste Fläche gegebene Curve auch der zweiten angehören.

Suchen wir jetzt die Bedingungen, unter welchen eine solche Osculation stattfindet.

Für eine beliebige durch die erste Fläche gelegte Curve gilt ausser deren Gleichung $z = f(x, y)$ noch eine zweite, die sich auf die Form $y = \psi(x)$ bringen lässt. Da hier $\psi(x)$ ganz beliebig sein soll, so sind auch die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ beliebig.

Nun hat man, wenn man vermöge der Gleichungen $z = f(x, y)$ und $y = \psi(x)$ sowohl y als z als Functionen von x betrachtet,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Sollen nun für unsere beiden Flächen n aufeinander folgende, dem Punkte (x, y, z) benachbarte Punkte zusammenfallen, so müssen die Werthe $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \cdots \frac{d^nz}{dx^n}$ unverändert bleiben, wenn man für (x, y, z) die Coordinaten des gemeinschaftlichen Punktes beider Flächen setzt und f mit f_1 vertauscht. Bei beliebigen Werthen von $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ u. s. w. kann dies aber nur stattfinden, wenn:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \quad \text{u. s. w.},$$

kurz, wenn für den fraglichen Punkt ausser der Gleichheit der Werthe von f und f_1 auch die ihrer sämmtlichen partiellen Differentialquotienten bis zu dem n^{ter} Ordnung sich ergiebt. Die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist dann $1 + 2 + \cdots\cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, und damit eine solche Osculation der gegebenen Fläche mit einer anderen stattfinden kann, die ebenfalls ihrer Form nach gegeben ist, muss die letztere $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ zu bestimmende Constanten enthalten.

Sind die Gleichungen der osculirenden Flächen in der Form $F(x, y, z) = 0$, $F_1(x, y, z) = 0$ gegeben, so bildet man aus der ersten sowohl als aus der zweiten die Werthe von $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ u. s. w. und identificirt dieselben, d. h. man eliminirt aus der Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

die Grösse $\frac{\partial z}{\partial x}$; aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

die Grösse $\frac{\partial z}{\partial y}$; aus:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

und der ersten Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\quad\text{und}\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\quad\text{u. s. w.,}$$

um auf diese Weise die Bedingungsgleichungen zu erhalten.

§ 48.

Das erste Beispiel, nämlich das für die Osculation erster Ord nung, bietet natürlich die Tangentialebene. Hier ist $n=1$, also die Anzahl der Bedingungsgleichungen drei. In der That enthält die Gleichung einer Ebene $\zeta=a\xi+b\eta+c$ drei Constanten. Sind x,y,z die Coordinaten des Berührungspunktes, so haben wir

$$z=ax+by+c,$$

also nach Elimination von c:

$$\zeta-z=a(\xi-x)+b(\eta-y);$$

die Werthe von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ sind dann bezüglich a und b, man hat also

$$\zeta-z=\frac{\partial z}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(\eta-y),$$

die bekannte Gleichung der Tangentialebene.

Bemerken wir aber hierbei noch Folgendes.

Bei der Untersuchung, in welchem Falle die Tangentialebene die Fläche berührt oder schneidet, wurden auch Fälle in Betracht gezogen, in welchen die Differentialquotienten höherer Ordnung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ u. s. w. verschwanden; in solchen Fällen sind diese Grössen also mit den aus der Gleichung der Tangentialebene gezogenen Werthen $\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta}$ u. s. w., welche identisch verschwinden, jedenfalls übereinstimmend, und es findet also dann zwischen der gegebenen Fläche und ihrer Tangentialebene eine Osculation höherer Ordnung statt. Diese Betrachtung ist etwas Analoges im Verhältniss zur Theorie der Doppel- und mehrfachen Tangenten in der Curvenlehre.

Im Allgemeinen aber sehen wir hieraus, dass in Ausnahmefällen auch dann noch eine Osculation höherer Ordnung stattfinden kann, wenn die Gleichung der osculirenden Fläche nicht die im Allgemeinen nöthige Zahl von Constanten enthält.

Schnitte der Flächen.

§ 49.

In der Theorie der Curven wurde derjenige Kreis betrachtet, welcher mit der Curve eine Osculation zweiter Ordnung hatte. Es läge nahe, in der Theorie der Flächen diese Betrachtung auf die Kugel zu übertragen: dies gelingt aber nur in den eben erwähnten Ausnahmefällen, welche später zu erwägen sind. Im Allgemeinen aber müsste für die Osculation zweiter Ordnung die Gleichung der osculirenden Fläche $\frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6$ Constanten enthalten, während die Gleichung der Kugel:

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2 = r^2 \cdot$$

deren nur vier enthält. Es muss also, wenn eine solche Osculation in Frage steht, eine andere Fläche gewählt werden, und man kann dieser letzteren eine möglichst einfache Gestalt geben. Als solche bietet sich nun dasjenige Paraboloid dar, dessen Axe mit der z-Axe parallel ist, dessen Gleichung ist nämlich:

$$1) \qquad \zeta = \tfrac{1}{2}(a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2) + d\xi + e\eta + f.$$

Wir bemerken jedoch, dass dieses Paraboloid mit der angenommenen Lage der z-Axe zusammenhängt, also bei jeder Aenderung der Lage derselben ein anderes ist.

Zur weiteren Vereinfachung nehmen wir nun an, dass ζ die Axe der z-Normale der gegebenen Fläche in dem Punkte, wo die Osculation stattfindet, dieser Punkt selbst aber Anfangspunkt, also $x = y = z = 0$ ist. Die allgemeine Gleichung der Tangentialebene in diesem Punkte:

$$\zeta - z = \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y),$$

wird in diesem Falle $\zeta = 0$, also auch $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Diese Werthe Null müssen sich also auch aus der Gleichung des Paraboloids für $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ und ausserdem $\zeta = 0$ ergeben, wenn man $\xi = \eta = 0$ setzt. Dies giebt $f = 0$, $d = 0$, $e = 0$, und die Gleichung unseres Paraboloids wird:

$$2) \qquad \zeta = \tfrac{1}{2}(a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2).$$

Da nun eine Osculation zweiter Ordnung stattfinden soll, so sind die aus 2) gewonnenen Werthe:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} = a, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = b, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} = c$$

mit den entsprechenden Werthen der gegebenen Fläche $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ für den Punkt $x = y = z = 0$ zu identificiren, es ist also für diesen, nämlich den Berührungspunkt,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = b, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c.$$

Unser Paraboloid ist aber ein elliptisches oder hyperbolisches, je nachdem ac grösser oder kleiner als b^2 ist; also je nachdem für die gegebene Fläche $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \gtrless \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$ ist, wenn man $x = y = z = 0$ setzt. Es folgt aber aus § 41, dass ersteres oder letzteres ein Berühren oder Schneiden der Fläche durch die Tangentialebene bedingt.

Da aber dies Paraboloid mit jeder durch Punkt (xyz) in der Fläche gezogenen Curve ausser diesem noch zwei aufeinander folgende Punkte gemein hat, so kann man bei allen Fragen, wo nur die beiden ersten Differentialquotienten in Betracht kommen, was also bei den Krümmungsradien und Krümmungsebenen dieser Curven bekanntlich stattfindet, statt der Fläche selbst dieses Paraboloid betrachten. Berücksichtigen wir noch, dass wir nur die durch Punkt (xyz) gehenden ebenen Schnitte zu betrachten brauchen, da, wenn man diese sämmtlichen Schnitte betrachtet, diesen auch sämmtliche auf Punkt (xyz) folgende Punkte, sowie auch die diesem benachbarten Punkte angehören, so zerfallen die Fragen, welche wir in Bezug auf die Krümmung dieser ebenen Schnitte zu stellen haben, in zwei Theile, nämlich:

1) Wie verhalten sich die Krümmungen sämmtlicher durch die Normale des betrachteten Punktes gelegten ebenen Schnitte? Diese Frage ist im Wesentlichen von Euler beantwortet worden. Diese durch die Normale gehenden Schnitte bezeichnen wir als Normalschnitte.

2) Wie verhalten sich die Krümmungen der nicht durch die Normale gehenden Schnitte, welche mit einem gegebenen Normalschnitte gemeinschaftliche Tangente haben? Diese Frage hat ein französischer Ingenieurofficier Meusnier beantwortet.

Mit der Beantwortung beider Fragen ist das Verhalten der Fläche in der Umgebung des gegebenen Punktes noch nicht erschöpft, da man lediglich die einzelnen Schnitte für sich betrachtet. Da nämlich

hier drei Punkte, also zwei Tangenten für jeden Schnitt in Betracht kommen, so entsteht noch die Frage nach der Beziehung, welche in jedem Normalschnitte zwischen demselben und der zu dem betrachteten Punkte (xyz) gehörigen Normale stattfindet. Diese Beziehung ist von Bertrand den Sätzen von Euler und Meusnier hinzugefügt worden.

§ 50.

Wir wollen zunächst diejenigen Schnitte betrachten, welche durch dieselbe Tangente gehen. Da wir wie oben gezeigt bei diesen Untersuchungen statt der gegebenen Fläche das Osculationsparaboloid betrachten dürfen, und über die Lage der x-Axe nichts festgesetzt ist, so nehmen wir die Tangente selbst als solche. Die Gleichung des entsprechenden Normalschnittes ist dann: $z = \frac{1}{2}ax^2$, indem wir jetzt anstatt ξ, η, ζ wieder x, y, z als laufende Coordinaten einführen, da ferner für diesen $y = 0$ zu setzen ist. Für den Krümmungsradius ϱ dieses Schnittes erhalten wir aus der allgemeinen Formel $\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{dx^2}}$ den Werth: $\varrho = \frac{(1 + a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a}$, also, da für den fraglichen Punkt $x = 0$ ist: $\varrho = \frac{1}{a}$. Möge nun ein schiefer durch dieselbe Tangente gehender Schnitt mit der Tangentialebene den Winkel φ bilden, und ändern wir die Axen so, dass mit Beibehaltung der x-Axe die neue z_1-Axe in diesem schiefen Schnitte liegt, dann ist φ der Winkel zwischen den Axen y und z_1, also:

$$y = z_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, \qquad z = z_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi.$$

Für den betrachteten Schnitt selbst aber ist $y_1 = 0$, also wenn man unter dieser Bedingung in die Gleichung des Paraboloids

$$z = \tfrac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

ihre Werthe setzt:

$$z_1 \sin\varphi = \tfrac{1}{2}(ax^2 + 2bxz_1 \cos\varphi + cz_1^{\,2} \cos\varphi^2),$$

$$\sin\varphi \frac{dz_1}{dx} = ax + bz_1 \cos\varphi + \frac{dz_1}{dx}(bx \cos\varphi + cz_1 \cos\varphi^2),$$

$$\sin\varphi \frac{d^2z_1}{dx^2} = a + b\cos\varphi \frac{dz_1}{dx} + \left(b\cos\varphi + c\frac{dz_1}{dx}\cos\varphi^2\right)\frac{dz_1}{dx}$$
$$+ \cos\varphi(bx + cz_1 \cos\varphi)\frac{d^2z_1}{dx^2}.$$

Da wir aber den Krümmungsradius im Anfangspunkte zu bestimmen haben, so ist:

$$x = 0, \quad z_1 = 0, \quad \frac{dz_1}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 z_1}{dx^2} = \frac{a}{\sin\varphi}.$$

Ist also ϱ_1 der Krümmungsradius des schiefen Schnittes, so hat man:

$$\varrho_1 = \frac{\sin\varphi}{a} = \varrho \sin\varphi.$$

Der Winkel φ ist übrigens das Complement desjenigen, den die beiden Krümmungsradien des Normalschnittes und des schiefen Schnittes mit einander machen, also ist auch ϱ_1 die Projection von ϱ auf die Ebene des schiefen Schnittes; d. h.:

1) Legt man durch irgend eine Tangente einer Fläche eine durch die Normale gehende und eine beliebige Ebene und sind die Krümmungsradien der Schnittcurven bezüglich ϱ und ϱ_1, φ der Winkel der schiefen Ebene mit der Tangentialebene, so hat man: $\varrho_1 = \varrho \sin\varphi$, oder ϱ_1 ist die Projection von ϱ auf die schiefe Ebene. Dies ist der Meusnier'sche Satz.

Demselben lässt sich noch folgender Ausdruck geben. Legt man nämlich durch den Punkt $x = y = z = 0$ eine Kugel, welche den Krümmungshalbmesser des Normalschnittes, welcher hier in Betracht kommt, zum Radius hat, und schneidet diese Kugel durch eine Ebene, welche durch die Tangente des Normalschnittes geht, so ist offenbar der Radius des Kreises, in welchem diese Ebene die Kugel schneidet, die Projection des im Normalschnitte befindlichen Kugelradius. Also:

2) Für alle ebenen Schnitte unserer Fläche, welche gemeinschaftliche Tangente haben, sind die Krümmungskreise zugleich die ebenen Schnitte einer Kugel, welche den Krümmungsmittelpunkt des zugehörigen Normalschnittes zum Mittelpunkte hat.

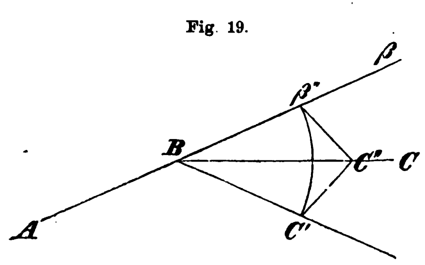
§ 51.

Von diesem Meusnier'schen Satze folgen noch zwei Beweise: ein trigonometrischer und ein geometrischer.

A) Trigonometrischer Beweis des Meusnier'schen Satzes.

Sei AB das Element irgend einer Tangente der Fläche, also B ebenfalls auf der Fläche gelegen (Fig. 19). Lege man dann durch AB den Normalschnitt, und möge dieser mit der Fläche das Element BC gemein haben. Sei ferner ABC' ein schiefer Schnitt, so dass C' sich ebenfalls auf der Fläche befindet. Die Ebene des Winkels CBC' ist dann die Tangentialebene in B (nämlich die

Fig. 19.



Ebene dreier einander unendlich naher Punkte auf der Fläche). Nun haben wir (§ 10) gesehen, dass der Krümmungsradius einer Curve gleich dem Bogenelement dividirt durch den Contingenzwinkel ist, also wenn wir uns AB nach β verlängert denken und für die unendlich kleinen Winkel βBC, $\beta BC'$ ihre Sinus setzen:

$$\varrho_1 = \frac{AB}{\sin \beta BC'}, \quad \varrho = \frac{AB}{\sin \beta BC},$$

d. h.:
$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{\sin \beta BC}{\sin \beta BC'} = \frac{\sin \beta'' C''}{\sin \beta'' C'}.$$

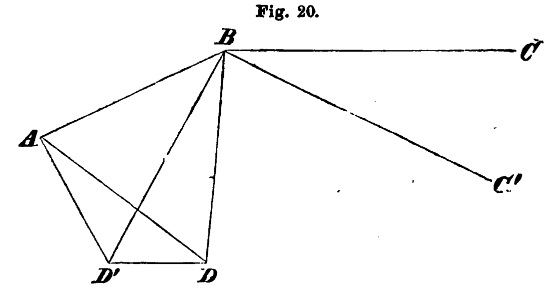
Beschreiben wir nun um B mit Radius BC' eine Kugel, so entstent das sphärische Dreieck $\beta'' C'' C'$, worin Winkel $\beta'' C'' C'$ ein rechter ist, da die Normalebene ABC oder βBC zur Tangentialebene CBC' senkrecht ist. Es ist ferner Winkel $\beta'' C' C''$ oder C' der Neigungswinkel der Tangentialebene $C'BC''$ und des schiefen Schnittes $\beta BC'$, also gleich φ, also nach einem Satze der sphärischen Trigonometrie:

$$\frac{\sin \beta'' C''}{\sin \beta'' C'} = \sin C' \quad \text{oder} \quad \frac{\varrho_1}{\varrho} = \sin \varphi.$$

B) Geometrischer Beweis.

Folgender Beweis ist rein geometrisch. Seien ABC drei einander unendlich nahe Punkte eines durch B gehenden Normalschnittes (Fig. 20), ABC' die eines schiefen Schnittes, der mit den ersteren die Tangente AB gemein hat. Mögen AD senkrecht auf AB, BD senkrecht auf BC, beide im Normalschnitte, BD' senkrecht auf BC' in der Ebene des schiefen Schnittes liegen, dann ist offenbar D der Krümmungsmittelpunkt, $AD = BD$ der Krümmungsradius des Normalschnittes. Da nun CBC' die Tangentialebene ist, so steht BD auf dieser, also auch auf BC' senkrecht; da auch BD' auf BC' senkrecht steht, so ist die $D'BD$ Verticalebene zu BC'. Fälle man nun von D Loth DD' auf BD', dann ist also DD' auf BD' und BC', also auf der ganzen Ebene $C'BD'$, mithin auf BA senkrecht, aber auch DA ist senkrecht auf BA, mithin auch die Ebene $D'AD$. Zieht man also $D'A$, so ist auch diese Linie senkrecht auf BA, mithin ist $D'A$ die $D'B$ benachbarte Normale des schiefen Schnittes, D' also ist der Krümmungsmittelpunkt, $D'A$ der Krümmungsradius dieses

Fig. 20.



Schnittes, es ist aber derselbe die Projection von DA, d. h. von dem Krümmungsradius der Normalebene auf die des schiefen Schnittes; was zu beweisen war.

§ 52.

Da durch den Meusnier'schen Satz die Theorie der Krümmungen sämmtlicher Schnitte auf die der Normalschnitte zurückgeführt ist, so bleiben nur noch die letzteren zu betrachten. Wir gehen hierbei wieder von der Gleichung des Paraboloids aus, bestimmen aber die bis jetzt in der Tangentialebene beliebig liegende x-Axe so, dass der Factor von xy verschwindet; also jene Gleichung ist jetzt:

$$1) \qquad z = \tfrac{1}{2}(ax^2 + cy^2).$$

Dieses Verschwinden wird durch die bekannte Transformation bewerkstelligt, durch welche man die Gleichungen der Kegelschnitte auf ihre Hauptaxen als Coordinatenaxen zurückführt. Nach § 50 sind dann $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{c}$ die Krümmungsradien, also a und c die Krümmungen derjenigen Normalschnitte, welche in der xz- und yz-Ebene liegen; diese Schnitte, welche also auf einander senkrecht stehen, heissen Hauptschnitte, ihre Tangenten, bezüglich Krümmungen und Krümmungsradien: Haupttangenten, Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsradien. Bestimmen wir zunächst die Krümmung eines beliebigen Normalschnittes. Er möge mit dem Hauptschnitte, dessen Krümmungsradius $\frac{1}{a}$ war, den Winkel φ machen. Verlegen wir zu dem Ende die Axen x_1 und y_1 so, dass die erstere in den zu untersuchenden Schnitt fällt. Die Transformationsgleichungen:

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi \quad \text{und} \quad y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi$$

geben dann als Factor von $\frac{x_1^2}{2}$ den Ausdruck:

$$a \cos\varphi^2 + c \sin\varphi^2,$$

und dies ist nach § 50 die Krümmung des betreffenden Normalschnittes. Also:

„Sind a und c die Krümmungen der Hauptschnitte, und macht ein beliebiger Normalschnitt mit ersterem den Winkel φ, so ist dessen Krümmung

$$2) \qquad \varkappa = a \cos\varphi^2 + c \sin\varphi^2 = a - (a - c) \sin\varphi^2.\text{“}$$

Dies ist der Euler'sche Satz. Es bleibt aber noch übrig, die Hauptschnitte näher zu definiren. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen; wir knüpfen zunächst an die Betrachtungsweise Euler's an.

Zunächst ist in Gleichung $z = \frac{1}{2}(ax^2 + cy^2)$ eine der Grössen a und c, als welche wir immer a annehmen wollen, als positiv zu betrachten. Denn wären beide negativ, so brauchte man nur das Zeichen von z, also die als positiv anzunehmende Richtung der z-Axe zu ändern. Im Falle das Zeichen von c auch positiv ist, giebt unsere Gleichung dann ein elliptisches, im entgegengesetzten Falle ein hyperbolisches Paraboloid. Im algebraischen Sinne kann man also immer a grösser als c betrachten. Wenn aber für $x = 0$, also für den zweiten Hauptschnitt, c negativ ist, so bedeutet dies, dass die beiden Hauptkrümmungsradien in entgegengesetzte Richtung fallen, also die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte auf verschiedenen Seiten der Fläche liegen. Nun hat nach Gleichung 2) $\varkappa$ seinen grössten Werth a, wenn $\varphi = 0$, seinen kleinsten c, wenn $\varphi = 90^0$ ist (wenn das Vorzeichen von c berücksichtigt wird).

Also: „Die Hauptschnitte sind diejenigen Normalschnitte, welche die grösste und kleinste Krümmung haben."

Noch ist zu bemerken, dass bei negativem c auch zwei der Normalschnitte die Krümmung Null, also unendlich grossen Krümmungsradius haben. Diese sind, wenn wir für c setzen $-e$, diejenigen wo:

$$a - (a + e)\sin\varphi^2 = 0, \quad \text{also} \quad \sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{a}{a+e}} \quad \text{ist.}$$

Es giebt aber noch eine zweite wichtige Definition für die Hauptschnitte. Um diese festzustellen, berechnen wir zunächst den Winkel, welchen die Normale des Paraboloids in irgend einem zweiten Punkte N eines Hauptschnittes mit der Ebene desselben macht. Dieser Hauptschnitt sei die Axe der x, der betreffende Winkel ϑ ist dann das Complement desjenigen, welchen die y-Axe mit der Normale in N macht, also:

$$\sin\vartheta = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = -\frac{cy}{\sqrt{1 + a^2x^2 + c^2y^2}},$$

oder, da für unseren Hauptschnitt $y = 0$ ist, $\sin\vartheta = 0$; d. h.: die Normale liegt in der Ebene des Hauptschnittes. Nun hat die gegebene Fläche mit dem Paraboloid den Berührungspunkt den ihr zunächst liegenden, also auch die durch beide gehenden Normalen gemein, und diese beiden liegen also ebenfalls in der Ebene des Hauptschnittes. Also:

„Wenn man in einem Hauptschnitte einen von dem Berührungspunkte M ausgehenden unendlich kleinen Bogen nimmt, und durch dessen Endpunkt N sowie durch M zwei Normalen legt, so liegen

diese beiden in einer Ebene, werden also, wenn sie nicht ausnahmsweise parallel sind, sich schneiden.“

Diese Eigenschaft kommt aber ausschliesslich den Hauptschnitten zu, kann also als Definition dienen, wie folgende Betrachtung zeigt. Möge ein beliebig gegebener Normalschnitt die x-Axe enthalten, gehen wir also von der allgemeinen Gleichung

$$z = \tfrac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

aus, behalten aber die obigen Bezeichnungen bei, so ist

$$\sin \vartheta = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = -\frac{bx + cy}{\sqrt{1 + (ax + by)^2 + (bx + cy)^2}}.$$

Für den M benachbarten Punkt ist nun $y = 0$ und $x = MN$ unendlich klein, es kann also der Nenner $= 1$ gesetzt werden, und man hat: $\sin \vartheta = -bx$, oder wegen des unendlich kleinen x: $\vartheta = -b \cdot MN$.

Es macht also bei jedem Normalschnitte, der nicht Hauptschnitt ist, die Normale des Punktes N mit der Schnittebene einen unendlich kleinen Winkel, kann also die durch M gehende Normale nicht schneiden, diese Eigenschaft kommt also nur den Normalschnitten zu.

Die Formel $\vartheta = -b \cdot MN$ enthält aber auch einen wichtigen Satz, welcher von Bertrand herrührt, und sich auf die Flächennormale bezieht. Legt man nämlich einen zweiten Normalschnitt durch die auf MN senkrechte Tangente MT, und macht man $MT = MN$, so erhält man den Winkel ϑ_1, welchen die durch T gehende Normale mit dem durch M gehenden Normalschnitte macht, wenn man in der Gleichung des Paraboloids x mit y, a mit c vertauscht, wo dann $y = MT = MN$ zu setzen ist. Also:

$$\vartheta_1 = -by = -bMN = \vartheta,$$

d. h.: „Legt man durch einen Punkt M zwei aufeinander senkrechte Tangenten, und schneidet von diesen gleiche unendlich kleine Stücke $MN = MT$ ab, so machen die durch N und T gelegten Normalen mit den durch MN und MT gelegten Normalschnitten gleiche Winkel. Das gleiche Vorzeichen von ϑ und ϑ_1 bedeutet, dass diese Normalen gleichzeitig innerhalb oder ausserhalb des von den Normalschnitten gebildeten Winkels liegen.“

Dieser Bertrand'sche Satz ist darum wichtig, weil er nicht bloss das Verhalten der Normalschnitte gegen einander, sondern zu den in ihnen liegenden Flächennormalen angiebt, also den Meusnier'schen und Euler'schen Satz wesentlich ergänzt.

Zwei andere wichtige Sätze giebt uns aber noch die Formel für die Krümmung eines beliebigen Normalschnittes:

$$k = a \cos \varphi^2 + c \sin \varphi^2,$$

wo φ der Winkel ist, den dieser Schnitt mit dem in der xz-Ebene liegenden Hauptschnitte macht. Da nämlich der Winkel φ, abgesehen vom Vorzeichen, welches hier nicht in Betracht kommen kann, da nur die Quadrate der trigonometrischen Linien vorkommen, zwei Normalschnitten angehört, so haben wir den Satz:

I. „Die auf beiden Seiten eines Hauptschnittes liegenden Normalschnitte, welche mit dem ersteren gleiche Winkel bilden, haben gleiche Krümmung."

Möge aber ein zweiter Normalschnitt mit der Ebene yz denselben Winkel φ machen, k_1 seine Krümmung sein, so erhalten wir, indem wir a und c vertauschen:

$$k_1 = a \sin \varphi^2 + c \cos \varphi^2,$$

also:

$$k + k_1 = a + c,$$

d. h. da die Gleichheit der Winkel stattfindet, wenn beide Normalschnitte auf einander senkrecht stehen:

II. „Die Summe der Krümmungen zweier aufeinander senkrechten Normalschnitte ist constant, also gleich der Summe der Krümmungen der Hauptschnitte."

Uebrigens findet die Gleichheit der Winkel φ auch dann statt, wenn beide Normalschnitte sich innerhalb oder ausserhalb des von den Hauptschnitten gebildeten rechten Winkels befinden. Das sich hieraus ergebende Resultat ist aber schon durch Satz I bewiesen.

Endlich erwägen wir noch den Fall, wo ein Normalschnitt den Winkel zwischen den Hauptschnitten halbirt, also mit jedem derselben einen Winkel von 45^0 macht, dann ist $k_1 = k = \frac{a + c}{2}$, also:

„Der Normalschnitt, welcher den Winkel zwischen den Hauptschnitten halbirt, hat zur Krümmung die halbe Summe beider Hauptkrümmungen."

Schliesslich geben wir dem Euler'schen Satze noch einen geometrischen Ausdruck.

Legen wir durch den Berührungspunkt M die Tangentialebene, so wird jeder Normalschnitt dieselbe in einer Tangente schneiden, welche mit der eines Hauptschnittes den Winkel φ machen möge. Die Tangente dieses Hauptschnittes sei nun Axe der x eines ebenen durch M gehenden Coordinatensystems, also die des andern Hauptschnittes Axe der y, und die Gleichung einer beliebigen Tangente ist

$y = x \operatorname{tg} \varphi$. Ist nun v die Länge eines beliebigen von M ausgehenden Stückes dieser Tangente, so hat man $v^2 = x^2 + y^2$, und die Formel $k = a \cos \varphi^2 + c \sin \varphi^2$ giebt: $kv^2 = ax^2 + cy^2$. Setzen wir nun $v = \pm \sqrt{\frac{1}{k}}$, also gleich der Wurzel des dem entsprechenden Normalschnitte angehörigen Krümmungsradius, so erhalten wir:

$$ax^2 + cy^2 = \pm 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse oder je zweier conjugirten Hyperbeln, je nachdem c positiv oder negativ ist. Für die Ellipse giebt nur das positive Zeichen von ± 1 einen Sinn. Die Hauptaxen dieser Curven fallen in die Richtung der Haupttangenten, und zwar sind die Halbaxen der Ellipse bezüglich gleich $\frac{1}{\sqrt{a}}$ und $\frac{1}{\sqrt{c}}$, und die reellen Axen der beiden Hyperbeln gleich $\frac{1}{\sqrt{a}}$ und $\frac{1}{\sqrt{-c}}$. Also:

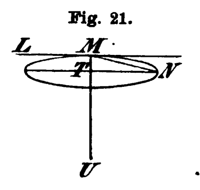
„Schneidet man von jeder in M die Fläche berührenden Tangente von M aus ein Stück gleich $\sqrt{\frac{1}{k}}$ ab, so bilden die Endpunkte dieser Stücke entweder eine Ellipse oder zwei conjugirte Hyperbeln, deren Hauptaxen die Haupttangenten sind.

Theorie der Indicatrix.

§ 53.

Für den oben erwähnten Kegelschnitt lässt sich aber noch eine engere Beziehung zu der gegebenen Fläche nachweisen. Diese Betrachtung rührt von Dupin her, und zeigt den unmittelbaren Zusammenhang der Theorie der Normalschnitte mit der der Kegelschnitte. Seien L, M, N (Fig. 21) benachbarte sonst beliebige Punkte einer Fläche. Durch M legen wir eine Tangentialebene, in welche dann auch der Punkt L fallen möge; durch N aber, welcher Punkt der Tangentialebene nicht angehört, legen wir eine dieser parallele Ebene. Die durch M gelegte Normale MU möge diese letztere in T schneiden. Diese parallele Ebene wählen wir als Ebene der xy, T als Anfangspunkt; TU in der Richtung von T nach U ist Axe der z. Sind ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten, so haben wir also für diese xy-Ebene $\zeta = 0$, für Punkt T $\xi = \eta = \zeta = 0$, und für Punkt M $\xi = \eta = 0$, $\zeta = - TM$ oder gleich MT, wenn man die Richtung dieser Linie berücksichtigt. Die auf diese Coordinaten bezogene Gleichung der Fläche schreiben wir

Fig. 21.



unter der Form: $\zeta = f(\xi, \eta)$, es ist dann, da Punkt M in der Fläche liegt: $-TM = f(0, 0)$. Die Curve aber, in welcher die Ebene (xy) und unsere Fläche sich schneiden, hat die Gleichungen: $\zeta = 0$, $f(\xi, \eta) = 0$. Nun aber sind die Grössen ξ und η nur unendlich wenig von Null abweichend und man kann daher $f(\xi, \eta)$ so entwickeln, dass man nur bis auf die zweiten Potenzen der Variablen geht. Wir erhalten so:

$$0 = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\xi\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2\right),$$

wo nach der Differentiation für x und y zu setzen ist Null. Da aber die Gleichung $\zeta = 0$ die einer Ebene parallel der Tangentialebene ist, so muss für diese Werthe $x = y = 0$, auch $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sein, und setzen wir für $TM = -f(0, 0)$ jetzt wieder ζ, wo ζ also nur eine unendlich kleine Constante bedeutet, so haben wir, wenn noch für diese Werthe von x und y: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} = b$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c$ gesetzt wird:

$$2\zeta = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2.$$

Die Schnittcurve ist also ein unendlich kleiner Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt in T fällt. Bemerken wir noch, dass $\zeta = TM$ unendlich klein von zweiter Ordnung ist, wie sich aus dem Vergleiche der beiden Seiten unserer Gleichung ergiebt.

Dieser Kegelschnitt wird von Dupin, der ihn eingeführt hat, Indicatrix (courbe indicatrice) genannt.

Ganz wie im vorigen Paragraphen können wir auch die Axen so legen, dass b verschwindet, dann ist die Gleichung auf die Hauptaxen der Indicatrix bezogen und lautet:

$$1) \qquad \frac{a}{2\zeta}\xi^2 + \frac{c}{2\zeta}\eta^2 = 1.$$

Dieser Kegelschnitt ist offenbar dem im vorigen Paragraphen betrachteten ähnlich. Ist er eine Ellipse, sind also a und c positiv, so sind die Halbaxen bezüglich: $\sqrt{\frac{2\zeta}{a}}$ und $\sqrt{\frac{2\zeta}{b}}$, und wie im vorigen Paragraphen lässt sich zeigen, dass diese den Haupttangenten parallel sind, da a, b, c dieselben Grössen wie dort bedeuten. Ist aber c negativ, und schreiben wir dafür $-e$, so lautet unsere Gleichung:

$$\frac{a\zeta^2}{2\xi} - \frac{e\eta^2}{2\zeta} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel. Hierbei ist aber Folgendes zu bemerken. Wir hatten angenommen, dass der Punkt T sich auf der nach Innen gerichteten Normale befand, und in der That ist dies nothwendig, wenn die Fläche in M ganz auf einer

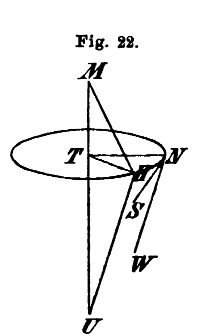
Seite der Tangentialebene liegt; ist nun unsere Gleichung die einer Ellipse, so wird dies immer der Fall sein, da ζ stets positiv sein muss. Ist aber die Gleichung die einer Hyperbel, so kann man ζ sowohl positiv als negativ annehmen, d. h. man kann den Punkt T auf den beiden Seiten der Tangentialebene von M aus annehmen, und zwar so, dass die entsprechenden beiden Linien TM einander gleich sind. Dieser Fall tritt also nur ein, wenn die Tangentialebene in M die Fläche schneidet, also bei einer Sattelfläche, und die Gleichung der Indicatrix ist durch eine zweite Gleichung, wo für ζ gesetzt wird $-\zeta$, zu vervollständigen, man hat also

2) $$\frac{a\xi^2}{2\zeta} - \frac{e\eta^2}{2\zeta} = \pm 1 .$$

Nun liegen diese beiden Theile der Indicatrix allerdings in zwei verschiedenen Ebenen, projicirt man sie jedoch beide auf die Tangentialebene, so hat man zwei conjugirte Hyperbeln, also:

Im Falle a und c gleiche Zeichen haben, ist die Fläche keine, wenn sie ungleiche Zeichen haben eine Sattelfläche. Die Betrachtung der Indicatrix gestattet nun, die im vorigen Paragraphen gegebenen Sätze auf geometrische Betrachtungen zurückzuführen.

Fig. 22.



Sei H (Fig. 22) ein beliebiger Punkt der Indicatrix, dann ist MH eine Sehne des Krümmungskreises, zieht man also HU senkrecht auf derselben, so ist MU der Durchmesser des letzteren, also gleich $\frac{2}{k}$, wenn k die Krümmung des entsprechenden Normalschnittes ist, dann hat man: $TH^2 = MT \cdot TU$. Oder wenn r der Radius der Indicatrix ist: $r^2 = \zeta\left(\frac{2}{k} - \zeta\right)$, und da das unendliche kleine ζ in der Klammer zu vernachlässigen ist: $\frac{1}{k} = \frac{r^2}{2\zeta}$, oder der Krümmungsradius ist dem Quadrate des entsprechenden Halbmessers der Indicatrix proportional.

Die halben Axen der Indicatrix sind, wenn wir von der Ellipse ausgehen, $\sqrt{\frac{2\zeta}{a}}$ und $\sqrt{\frac{2\zeta}{c}}$, also die Hauptkrümmungshalbmesser, nach der eben gefundenen Formel $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{c}$, für die Hyperbeln sind $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{e}$ die reellen Halbaxen derselben.

Sei jetzt φ der Winkel, welchen der Halbmesser r mit der Axe der x macht, so giebt die Gleichung 1), wenn darin

$$\xi = r\cos\varphi = \sqrt{\frac{2\zeta}{k}}\cos\varphi,\quad \eta = \sqrt{\frac{2\zeta}{k}}\sin\varphi \quad \text{und} \quad r = \sqrt{\frac{2\zeta}{k}}$$

gesetzt wird: $k = a \cos \varphi^2 + c \sin \varphi^2$, also den Euler'schen Satz. Gilt Formel 2), so ist a oder c negativ. Bei jeder Ellipse, bezüglich conjugirten Hyperbeln, ist nun die Summe bezüglich Differenz der umgekehrten Quadrate je zweier auf einander senkrechten Halbmesser constant. Hieraus folgt dann der schon bewiesene Satz: $k + k_1 = a + c$.

Noch zeigen wir geometrisch, dass die durch M und die durch den unendlich nahen Punkt N der Haupttangente gelegte Flächennormale in eine Ebene fallen; dann sei N dieser Punkt, also MN die Haupttangente, NS die Tangente an die Indicatrix, auf welcher, da sie durch die Hauptaxe geht, auch TN senkrecht steht. Ist aber NW die Normale der Fläche in N, so steht diese Linie auch auf NS senkrecht, denn letztere Linie ist auch eine Tangente für die Fläche. Es ist also NS ein Loth auf die Ebene TNW oder MNW, da aber MU auf der Ebene der Indicatrix, also auf NS ebenfalls senkrecht steht, so fällt auch MU in diese Ebene.

Im Falle der beiden Hyperbeln erwähnen wir noch, dass zwei Normalschnitte existiren, welche den Asymptoten entsprechen, und für welche der Krümmungsradius unendlich, also die Krümmung gleich 0 ist.

Noch ist der Fall zu erwähnen, wo $0 = e$, also $2\zeta = a\xi^2$ ist, diese Gleichung giebt zwei parallele Gerade. Der eine Hauptkrümmungsradius ist dann noch immer gleich $\frac{1}{a}$, der andere aber $\frac{1}{e}$ wird unendlich, hat also die Krümmung Null, die zugehörige Haupttangente hat die den beiden Geraden parallelen Richtung. In diesem Falle ist ersichtlich, dass die Tangentialebene die Fläche nicht schneidet.

Andere Sätze noch lassen sich aus der Theorie der conjugirten Halbmesser der Kegelschnitte ableiten, z. B.: „Die Summe der Quadrate zweier zusammengehörigen conjugirten Halbmesser (Differenz bei den Hyperbeln) ist constant." Also: „Legt man durch zwei conjugirte Halbmesser der Indicatrix Normalschnitte, mit den Krümmungen k und k_1, so ist:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

(bei k_1 und c sind im Falle der Hyperbeln die Vorzeichen negativ), oder: „Das Parallelogramm, welches zwei conjugirte Halbmesser zu Seiten hat, besitzt constanten Inhalt." Also, wenn α der Winkel zwischen den so bestimmten Normalschnitten ist:

$$\frac{\sin \alpha^2}{k k_1} = \frac{1}{a c}.$$

Die conjugirten Tangenten.

§ 54.

Die beiden zuletzt gegebenen Formeln beziehen sich zunächst auf die Indicatrix. Da diese Curve aber nur eingeführt ist, um Eigenschaften der Fläche zu entwickeln, so ist es nöthig, die Bedeutung der conjugirten Halbmesser der ersteren für die letzteren aufzufinden.

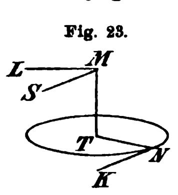


Fig. 23.

Seien L und M (Fig. 23) benachbarte Punkte der Fläche; wir legen durch M eine Tangentialebene, die also auch L enthält. Ferner legen wir durch den M benachbarten sonst beliebigen Punkt der Fläche N eine zweite Tangentialebene, welche also auch M enthält. Sie möge die erstere in MS schneiden. MN und MS bezeichnen dann zwei durch M gehende Tangenten, welche conjugirte Tangenten heissen. Also:

„Legt man durch zwei benachbarte Punkte M und N einer Fläche eine Tangentialebene, so ist ihr Durchschnitt die conjugirte Tangente von MN."

Wir können, wie oben bewiesen, nun für die drei Punkte L, M, N wieder die Fläche durch unser Paraboloid ersetzen, dessen Gleichung ist: $\zeta = \frac{1}{2}(a\xi^2 + c\eta^2)$, wo dann wieder M der Anfangspunkt und die Tangentialebene xy-Ebene ist. Die Gleichung der durch M gehenden Tangentialebene ist dann $\zeta = 0$, und die der durch N gehenden, wenn x, y, z die Coordinaten von N sind:

$$\zeta - z = \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y),$$

also mit Berücksichtigung der Gleichung $z = \frac{1}{2}(ax^2 + cy^2)$:

$$z + \zeta = ax\xi + cy\eta.$$

Für die zu MN conjugirte Tangente ist also

$$\zeta = 0, \quad z = ax\xi + cy\eta.$$

In der letzten Gleichung jedoch ist z zu vernachlässigen, da vermöge der Gleichung: $z = \frac{1}{2}(ax^2 + cy^2)$, wo x und y unendlich kleine Grössen sind, z unendlich klein von der zweiten Ordnung wird. Die Gleichungen der conjugirten Tangenten sind also:

$$\zeta = 0, \quad ax\xi + cy\eta = 0.$$

Es sei nun φ der Winkel der Tangente MN, ψ der der conjugirten Tangente mit der Axe der x, dann haben wir $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x}$, oder, da z gegen y verschwindet:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{und} \quad \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} \psi,$$

also:
$$a + c \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi = 0.$$

Es ist nun dieselbe Gleichung, wodurch in der Theorie der Kegelschnitte die conjugirten Halbmesser definirt werden, also:

„Werden durch Punkt M zwei conjugirte Tangenten gelegt, so ist deren Richtung die zweier conjugirten Halbmesser der Indicatrix.“

In den beiden am Schlusse des vorigen Paragraphen angeführten Sätzen können wir nun die Worte: „conjugirte Halbmesser der Indicatrix“ durch „conjugirte Tangenten der Fläche“ ersetzen.

Die Formel $a + c \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi = 0$ zeigt noch direct, dass die Beziehung der conjugirten Tangenten zu einander eine gegenseitige ist.

Der Satz, dass die Richtung zweier conjugirten Tangenten auch die der conjugirten Halbmesser der Indicatrix ist, lässt sich aber auch leicht geometrisch beweisen. Seien (Fig. 23) L, M, N wieder aufeinander folgende Punkte der Fläche, LM und MN zwei aufeinander folgende, in M und N berührende Tangenten, TN ein Halbmesser der Indicatrix, NK eine Tangente an dieselbe, also auch an die Fläche, also MNK die in N berührende Tangentialebene, welche die durch M gehende LMS in MS schneiden möge, dann schneidet die Ebene MNK die parallelen Ebenen LMS und die der Indicatrix in den parallelen Linien NK und MS. Erstere aber ist bekanntlich dem conjugirten Halbmesser von TN parallel, und diese ist also auch mit MS, d. h. der conjugirten Tangente von MN parallel, während MN als mit TN zusammenfallend gedacht werden kann, da, wie bereits gezeigt, TM unendlich klein von zweiter Ordnung ist. Diese Betrachtungen führen nun zu einer dritten Definition der Hauptschnitte und Haupttangenten. Bemerken wir nämlich, dass auch die Halbaxen eines Kegelschnittes conjugirte Halbmesser und zwar die einzigen aufeinander senkrechten sind, die Haupttangenten aber in die Richtung derselben fallen, so ergiebt sich:

„Hauptschnitte sind diejenigen Normalschnitte, welche die aufeinander senkrechten conjugirten Tangenten enthalten.“

§ 55.

Die Sätze von der Indicatrix erleiden gewisse Ausnahmen, für welche dann auch der Euler'sche Satz nicht gilt, und das Osculationsparaboloid nicht die gegebene Form hat, zunächst dann, wenn die zweiten Differentialquotienten sämmtlich verschwinden. Ist z. B.:

$$z = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 + \cdots,$$

wo die folgenden Glieder von höherer Dimension, als die von der dritten sind, so ist für den Punkt: $x = y = z = 0$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

und die Indicatrix wird eine Curve dritter Ordnung sein.

Auch im Falle, wo keine Tangentialebene, sondern ein Tangentialkegel vorhanden ist, werden unsere Betrachtungen illusorisch. Dasselbe aber tritt auch ein, wenn die zweiten Differentialquotienten in unbestimmter Form erscheinen oder unendlich werden.

Die Gleichung der gegebenen Fläche sei z. B. $z = (x^2 + y^2) f\left(\frac{y}{x}\right)$, wo f eine beliebige aber gegebene Function sein soll. Hier ist für $x = y = 0$ auch z gleich Null, die Fläche geht also durch den Anfangspunkt. Man überzeugt sich leicht, durch Differentiiren, dass für diesen Punkt auch $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ wird, die zweiten Differentialquotienten aber wegen des Factors $f\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{0}{0}\right)$ unbestimmt werden.

Aus ersterem Grunde hat die Tangentialebene im Anfangspunkte die Gleichung $z = 0$; legt man nun durch die Normale in diesem Punkte irgend eine Ebene, welche mit der xy-Ebene den Winkel φ macht, so sind die Gleichungen des entsprechenden Normalschnittes:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi \quad \text{und} \quad z = \frac{x^2}{\cos \varphi^2} f(\operatorname{tg} \varphi),$$

oder, wenn man die Ebene $x_1 z$ in diesen Schnitt verlegt, also $y_1 = 0$, $x = x_1 \cos \varphi$ setzt: $z = x_1^2 f(\alpha)$, wenn $\alpha = \operatorname{tg} \varphi$ gesetzt wird. Der Schnitt ist also immer eine Parabel mit wechselndem Parameter. Berechnen wir nun nach der Formel $\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 z}{dx^2}}$ den Krümmungsradius dieser Parabel für den Anfangspunkt, so wird: $\varrho = \frac{1}{2 f(\alpha)}$. Dieser Werth ist nur von der Wahl der Function f abhängig und kann, da α jeden reellen Werth annimmt, mehrere Maxima und Minima haben, ist also dem Euler'schen Satze und den damit zusammenhängenden Betrachtungen nicht unterworfen.

Für solche Fälle bemerkt Poisson, welcher auf diese Ausnahme aufmerksam gemacht hat, dass dieselbe den Meusnier'schen Satz nicht betrifft. In der That ist zwar bei dem ersten Beweise dieses Satzes, der hier gegeben ist, nicht aber bei den beiden letzten, von dem Osculationsparaboloid ausgegangen.

§ 56.

Zum Beweise der in den vorigen Paragraphen enthaltenen Sätze über die Krümmung der Flächen ist zur möglichsten Erleichterung der Rechnung über die Lage der Coordinatenaxen verfügt worden. Handelt es sich aber darum, die zur Berechnung nöthigen Formeln zu finden, so muss eine beliebige Lage der Axen vorausgesetzt werden, wobei dann die Beziehungen zur Indicatrix und zum Osculationsparaboloid wegfallen. Indem wir dies jetzt in Angriff nehmen, wollen wir zunächst für die Krümmung einer beliebigen durch den Punkt (x, y, z) einer Fläche gelegten Curve, sowie für die Winkel des Krümmungsradius derselben mit den Axen einen Ausdruck finden. Seien die Cosinus dieser Winkel bezüglich $l, m, n,$ so hat man nach § 10, Formel 4):

$$1) \quad l = rx'', \quad m = ry'', \quad n = rz'', \quad \text{wo} \quad r = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}$$

der Krümmungsradius ist, und x'', y'', z'' die zweiten Differentialquotienten nach dem Bogen s genommen sind. Diese Grössen aber erhalten wir aus der Gleichung der Fläche: $F(x, y, z) = 0$ und aus der für die gegebene Curve mit dieser zu verbindenden Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$. Sei jetzt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = R, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = L, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = M,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = N, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = L', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = M', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = N',$$

so hat man als Differentialgleichung der Fläche

$$Px' + Qy' + Rz' = 0,$$

wo x', y', z' die Differentialquotienten nach dem Bogen s, also die Cosinus der Winkel sind, welche die Tangente unserer Curve mit den Axen macht. Diese Cosinus bezeichnen wir mit α, β, γ und differentiiren nochmals nach s.

$$Px'' + Qy'' + Rz'' + K = 0,$$

wenn $\quad K = L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + 2L'\beta\gamma + 2M'\alpha\gamma + 2N'\alpha\beta$

gesetzt wird. Multipliciren wir noch mit r und berücksichtigen die Gleichungen 1), so haben wir:

$$Pl + Qm + Rn + rK = 0,$$

oder wenn λ, μ, ν die Cosinus der Winkel sind, welche die Flächennormale mit den Axen macht, wo dann $\lambda = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$ u. s. w. ist

$$\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\,(l\lambda + m\mu + n\nu) = -rK.$$

$l\lambda + m\mu + n\nu$ ist nun der Cosinus des Winkels ϑ, welchen der Krümmungsradius unserer Curve mit der Normale der Fläche macht, also:

$$2) \qquad \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \cos \vartheta = - rK.$$

Geht die Krümmungsebene der von uns betrachteten Curve durch die Flächennormale, ist also $\cos \vartheta = 1$, und ist ϱ der Krümmungsradius des Normalschnittes, so ist:

$$3) \qquad - \varrho K = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2},$$

und da für alle Curven, die in Punkt (xyz) gemeinschaftliche Tangente haben, die Grössen α, β, γ, also auch K identisch sind:

$$r = \varrho \cos \vartheta.$$

Dies ist wieder der Meusnier'sche Satz, und auch dieser Beweis gilt für den von Poisson bemerkten Ausnahmefall.

§ 57.

Es bleibt nun noch übrig, die Lage der Hauptschnitte und den Ausdruck für die Hauptkrümmungen zu finden. Für diese Grössen haben wir drei verschiedene Definitionen aufgestellt. Indem wir zunächst von der ersten, die Euler gegeben hat, ausgehen, setzen wir für einen beliebigen Normalschnitt $\varrho = \frac{1}{\delta}$, und haben die Frage zu beantworten: Für welche Werthe der Cosinus α, β, γ ist der Ausdruck $\delta = - \frac{K}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$, d. h. die Grösse K ein Maximum oder Minimum. Hierbei sind α, β, γ noch durch die beiden Gleichungen

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma = 0, \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

bestimmt, es handelt sich also um ein sogenanntes bedingtes Maximum oder Minimum. Dass aber im Allgemeinen ein Maximum und Minimum, und nur je ein solches vorhanden sei, ergiebt sich folgendermassen.

Setzen wir für $\varrho = \frac{1}{\delta}$ jetzt $- u^2$, dann ist

$$u^2 = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{K}.$$

Legen wir nun durch Punkt M der Fläche eine Gerade von der Länge u, wo in dem Nenner die Richtungscosinus α, β, γ sich eben auf diese Linie beziehen, und nennen wir die Coordinaten des Endpunktes dieser Linie ξ, η, ζ, so ist $\xi = u \cdot \alpha$, $\eta = u \cdot \beta$, $\zeta = u \cdot \gamma$, wo ζ, η, ξ sich auf ein durch M gehendes, dem gegebenen paralleles Coordinatensystem beziehen. Befreit man nun die Gleichung für u^2 vom

Nenner und setzt in ihn die Grössen ξ, η, ζ ein, so erhält man, indem man für K seinen Werth schreibt:

$$L\xi^2 + M\eta^2 + N\zeta^2 + 2L'\eta\zeta + 2M'\zeta\xi + 2N'\xi\eta = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2},$$

und
$$P\xi + Q\eta + R\zeta = 0,$$

d. h. wenn man von Punkt M aus alle Strahlen zieht, die diesen Gleichungen entsprechen, so erhält man eine ebene Curve vom zweiten Grade für die Endpunkte dieser Strahlen, deren Mittelpunkt M selbst ist, und deren Ebene die Tangentialebene in M ist. Diese Tangentialebene ist aber für die Hülfsfläche zweiten Grades eine Diametralebene, schneidet also aus ihr einen Kegelschnitt aus. Jeder Kegelschnitt mit einem Mittelpunkte hat zwei Halbmesser, welche aufeinander normal stehen und deren Quadrate, algebraisch betrachtet, ein Maximum und ein Minimum sind. Daraus folgt unmittelbar, dass der Ausdruck für ϱ einen grössten und einen kleinsten Werth hat, und nicht mehr, und dass diese Werthe sich auf zwei Tangenten in der Tangentialebene beziehen, welche aufeinander normal stehen*).

Um nun diesen Maximums- und Minimumswerth von ϱ zu finden, haben wir, weil der Zähler des Ausdrucks $\frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{K}$ constant ist, nur den Nenner K, d. h. die Grösse

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + 2L'\beta\gamma + 2M'\gamma\alpha + 2N'\alpha\beta$$

zum Minimum oder Maximum zu machen, wobei die beiden Gleichungen $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ und $P\alpha + Q\beta + R\gamma = 0$ bestehen. Dergleichen Aufgaben des bedingten Maximums oder Minimums löst man am Besten nach folgender Methode.

Man addire zu der Grösse K die beiden Bedingungsgleichungen, jede mit einer constanten Grösse multiplicirt:

$$\begin{aligned} &L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + 2L'\beta\gamma + 2M'\gamma\alpha + 2N'\alpha\beta \\ &\quad + \varepsilon(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1) + 2\varepsilon'(P\alpha + Q\beta + R\gamma) = 0, \end{aligned}$$

diese Gleichung differentiire man nach den drei Variabeln α, β, γ:

$$\begin{aligned} L\alpha + N'\beta + M'\gamma + \varepsilon\alpha + \varepsilon' P &= 0, \\ N'\alpha + M\beta + L'\gamma + \varepsilon\beta + \varepsilon' Q &= 0, \\ M'\alpha + L'\beta + N\gamma + \varepsilon\gamma + \varepsilon' R &= 0, \end{aligned}$$

und aus diesen hat man α, β, γ zu bestimmen.

Wir multipliciren sie zunächst der Reihe nach mit α, β, γ und addiren sie, wodurch wir ε finden:

$$K + \varepsilon \cdot 1 + \varepsilon' \cdot 0 = 0, \quad \text{also} \quad \varepsilon = -K.$$

*) Offenbar kommt die Betrachtung auf das Paraboloid des § 51 und die Indicatrix hinaus, indem hier nur die Axen beliebig gelegt sind.

Substituiren wir dies, so werden unsere Gleichungen

$$
1)\quad
\begin{aligned}
(L-K)\alpha + N'\beta + M'\gamma &= -\varepsilon' P,\\
N'\alpha + (M-K)\beta + L'\gamma &= -\varepsilon' Q,\\
M'\alpha + L'\beta + (N-K)\gamma &= -\varepsilon' R.
\end{aligned}
$$

Bestimmen wir aus diesen Gleichungen α, β, γ, so erhalten wir, wenn wir den gemeinsamen Nenner $\begin{vmatrix} L-K, & N', & M' \\ N', & M-K, & L' \\ M', & L' & N-K \end{vmatrix}$ $= \Delta$ setzen:

$$-\frac{1}{\varepsilon'}\cdot\Delta\cdot\alpha = P\left((M-K)\cdot(N-K) - L'^2\right)$$
$$+ Q\left(L'M' - N'(N-K)\right) + R\left(N'L' - M'(M-K)\right),$$
$$-\frac{1}{\varepsilon'}\cdot\Delta\cdot\beta = P\left(L'M' - N'(N-K)\right)$$
$$+ Q\left((N-K)(L-K) - M'^2\right) + R\left(M'N' - L'(L-K)\right),$$
$$-\frac{1}{\varepsilon'}\cdot\Delta\cdot\gamma = P\left(N'L' - M'(M-K)\right)$$
$$+ Q\left(M'N' - L'(L-K)\right) + R\left((L-K)(M-K) - N'^2\right).$$

Multipliciren wir diese drei Gleichungen der Reihe nach mit P, Q, R und addiren, so kommt $-\frac{1}{\varepsilon'}\cdot\Delta\cdot 0$, d. i.

$$
2)\quad 0 = \begin{cases}
P^2\left((M-K)(N-K) - L'^2\right) + Q^2\left((N-K)(L-K) - M'^2\right)\\
\qquad + R^2\left((L-K)(M-K) - N'^2\right)\\
+ 2QR\left(M'N' - L'(L-K)\right) + 2RP\left(N'L' - M'(M-K)\right)\\
\qquad + 2PQ\left(L'M' - N'(N-K)\right),
\end{cases}
$$

welche Gleichung in Beziehung auf K offenbar vom zweiten Grade ist. Die Wurzeln derselben (die sich auf das grösste und kleinste ϱ beziehen) seien K_1 und K_2, und es ist somit

$$\varrho_1 = -\frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{K_1} \text{ und } \varrho_2 = -\frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{K_2} \quad [K_1 < K_2]$$

der Werth des grössten und des kleinsten Krümmungsradius aller Normalschnitte, die durch einen gegebenen Punkt der Fläche gelegt werden können. Die Gleichung des Hauptschnittes ist bekannt, wenn man die Richtungscosinus l, m, n kennt, welche zu dem Lothe auf diesen Hauptschnitt gehören. α, β, γ sind durch unsere Gleichungen gegeben, λ, μ, ν sind bekannt, man erhält also die Richtungscosinus durch die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\alpha l + \beta m + \gamma n &= 0,\\
\lambda l + \mu m + \nu n &= 0,\\
l^2 + m^2 + n^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

In Beziehung auf die quadratische Gleichung 2) bleibt uns noch nachzuweisen, dass sie stets zwei reelle Wurzeln hat. Wir verbinden damit den Beweis dafür, dass die Werthe der Cosinus α, β, γ, die man vermittelst der Gleichungen 1) aus diesen beiden Wurzeln K_1 und K_2 bestimmen kann, zu zwei Linien gehören, die aufeinander normal stehen. Man findet die Cosinus α, β, γ, welche zu dem einen K gehören, aus 1), und eliminirt dann noch die Grösse ε' mittelst der Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Man setze dann statt des ersten K das andere ein, und erhält dadurch ein zweites System α, β, γ, welches zu einer andern Tangente gehört. Es seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Werthe von α, β, γ, welche zu dem Wurzelwerthe K_1 gehören, und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die, welche zu K_2 gehören. Dann haben wir die Gleichungen:

$$(L - K_1)\,\alpha_1 + N'\beta_1 + M'\gamma_1 = -\,\varepsilon_1'\,P$$

und zwei ähnliche, oder, wie wir schreiben wollen:

$$3)\qquad \begin{aligned} L\alpha_1 + N'\beta_1 + M'\gamma_1 &= -\,\varepsilon_1' P + K_1\alpha_1 \\ N'\alpha_1 + M\beta_1 + L'\gamma_1 &= -\,\varepsilon_1' Q + K_1\beta_1 \\ M'\alpha_1 + L'\beta_1 + N\gamma_1 &= -\,\varepsilon_1' R + K_1\gamma_1, \end{aligned}$$

$$3a)\qquad \begin{aligned} L\alpha_2 + N'\beta_2 + M'\gamma_2 &= -\,\varepsilon_2' P + K_2\alpha_2 \\ N'\alpha_2 + M\beta_2 + L'\gamma_2 &= -\,\varepsilon_2' Q + K_2\beta_2 \\ M'\alpha_2 + L'\beta_2 + N\gamma_2 &= -\,\varepsilon_2' R + K_2\gamma_2. \end{aligned}$$

Multipliciren wir das System 3) der Reihe nach mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und addiren, so erhalten wir:

$$L\alpha_1\alpha_2 + M\beta_1\beta_2 + N\gamma_1\gamma_2 + L'(\beta_2\gamma_1 + \gamma_2\beta_1) + M'(\gamma_2\alpha_1 + \alpha_2\gamma_1)$$
$$+ N'(\alpha_2\beta_1 + \beta_2\alpha_1) = -\,\varepsilon_1'(P\alpha_2 + Q\beta_2 + R\gamma_2) + K_1(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2),$$

wo noch das Glied $-\,\varepsilon_1'(P\alpha_2 + Q\beta_2 + R\gamma_2) = 0$ ist, weil $P\alpha + Q\beta + R\gamma = 0$. Aehnlich erhält man aus 3a)

$$L\alpha_1\alpha_2 + M\beta_1\beta_2 + N\gamma_1\gamma_2 + L'(\beta_2\gamma_1 + \gamma_2\beta_1) + M'(\gamma_2\alpha_1 + \alpha_2\gamma_1)$$
$$+ N'(\alpha_2\beta_1 + \beta_2\alpha_1) = -\,\varepsilon_2'(P\alpha_1 + Q\beta_1 + R\gamma_1) + K_2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2),$$

und da wiederum $-\,\varepsilon_2'(P\alpha_1 + Q\beta_1 + R\gamma_1) = 0$ ist,

$$4)\qquad K_1(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = K_2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2)$$

oder

$$(K_1 - K_2)(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 0.$$

Diese Gleichung kann erstens dadurch erfüllt werden, dass $K_1 - K_2 = 0$ ist, d. h. dass die Gleichung 2) in jedem Falle zwei gleiche Wurzeln hat. Dieser Fall tritt offenbar ein, wenn die Indicatrix ein Kreis ist, dann ist das Maximum und Minimum der Krümmungsradien der Normalschnitte, also die Krümmungsradien sämmtlicher Normalschnitte gleich; da dieser Fall aber nur ausnahmsweise eintreten kann, so wollen wir ihn zunächst ausschliessen.

In jedem anderen Falle hat man:

$$5)\qquad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0,$$

d. h. die beiden Tangenten, zu denen die Krümmungshalbmesser gehören, stehen aufeinander normal. Aus dieser Gleichung folgt zugleich der zu beweisende Satz, dass die quadratische Gleichung 2) nur reelle Wurzeln hat. Wenn man nämlich die Winkel α, β, γ in der oben angegebenen Weise, vermittelst der Gleichungen 1) und der Gleichung $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ darstellt, so ergeben sich $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ als dieselben Functionen von K_1, wie $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ von K_2. Setzt man also $\alpha_1=\varphi(K_1)$, so würde $\alpha_2=\varphi(K_2)$. Gesetzt den Fall, K_1 und K_2 wären imaginär, so müsste K_1 die Form haben $a+a'\cdot i$ und K_2 die Form $a-a'\cdot i$. Es würde also

$$\alpha_1=\varphi(a+a'\cdot i),\ \alpha_2=\varphi(a-a'\cdot i) \text{ oder } \alpha_1=A+A'\cdot i,\ \alpha_2=A-A'\cdot i,$$

und demgemäss $\alpha_1\cdot\alpha_2=A^2+A'^2$, also wesentlich positiv. Ebenso würde auch β_1, β_2 und γ_1, γ_2 wesentlich positiv werden. Da aber die Summe positiver Grössen nicht Null werden kann, so müssen beide K reell sein.

§ 58.

Bringen wir unser Resultat noch auf die Form, welche der Gleichung $z=\varphi(x,y)$ entspricht. Sie macht die Voraussetzung, dass die Gleichung der Fläche nach der einen Coordinate aufgelöst ist: $\varphi(x,y)-z=0$. Bildet man von dieser Gleichung der Fläche die partiellen Differentialquotienten der ersten und zweiten Ordnung, so erhält man

$$p=\varphi'(x),\quad q=\varphi'(y),\quad r=\varphi''(x),\quad s=\varphi''(x,y),\quad t=\varphi''(y);$$

es ist somit

$$P=p,\ Q=q,\ R=-1;\ L=r,\ M=t,\ N=0;\ L'=0,\ M'=0,\ N'=s.$$

Somit wird die Gleichung 2):

$$0=-p^2K(t-K)-q^2K(r-K)+(r-K)(t-K)-s^2+2pqsK$$

oder, nach K geordnet:

$$0=(rt-s^2)-\{(p^2+1)t-2pqs+(q^2+1)r\}K+(1+p^2+q^2)K^2.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(1+p^2+q^2)$, dividirt sie durch K^2 und setzt alsdann $\varrho=-\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{K}$ *) ein, so wird sie:

$$0=(rt-s^2)\varrho^2$$
$$-\{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t\}\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\varrho+(1+p^2+q^2)^2.$$

*) Das Minuszeichen ist übrigens wegen des doppelten Werthes der Wurzel für diese Betrachtungen ohne Bedeutung.

Diese Gleichung ist nun in der That einfacher als die vorhin für K gefundenen, jedoch ist in der Anwendung sehr oft die letztere vorzuziehen. Denn die jetzt gefundene Gleichung setzt gewöhnlich die Auflösung der Flächengleichung nach z voraus und diese Rechnung wird schon beim Ellipsoid so complicirt, dass Dupin, der sie angestellt hat, ganz überrascht war, dass das Endresultat nach so vielen Gleichungen ein so einfaches ist. Uebrigens lässt sich an diese Form der Gleichung noch die Bemerkung knüpfen, dass eine Fläche in jedem Punkte entgegengesetzte Hauptkrümmungen hat, in welchem sie von ihrer Tangentialebene geschnitten wird. Denn bezeichnet man die beiden Krümmungsradien mit ϱ_1 und ϱ_2, so ist aus der obigen Gleichung $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}$ und dieser Ausdruck wird negativ, d. h. ϱ_1 und ϱ_2 haben entgegengesetztes Zeichen, sobald $rt - s^2$ negativ ist (cf. §. 40).

Der in dieser Form gegebene Werth von ϱ gestattet auch den analytischen Beweis, dass immer, wenn p, q, r, s, t reelle Werthe haben, dies auch für beide Hauptkrümmungsradien gilt. Zu dem Ende ist eben nur zu beweisen, dass die durch Auflösung der quadratischen Gleichung für ϱ sich ergebende Wurzelgrösse einen positiven Radicanden enthält. Dieser Radicand aber lautet, wenn man den immer positiven Factor $\frac{1+p^2+q^2}{4}$ weglässt:

$$((1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r)^2 - 4(1+p^2+q^2)(rt-s^2).$$

Setzen wir hier

$$(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = v,$$

so ergiebt sich, wenn wir mittelst dieser Gleichung t eliminiren:

$$v^2 - \frac{4(1+p^2+q^2)}{1+p^2}\{vr + 2pqsr - (1+q^2)r^2 - (1+p^2)s^2\}.$$

Betrachten wir hierin v, r, s als Veränderliche und verwandeln nach bekannter Methode diesen Ausdruck in einen anderen, der nur die Quadrate linearer Functionen von v, r, s, nicht aber ihre Producte enthält, so erhalten wir:

$$\left(v - \frac{2(1-p^2+q^2)}{1+p^2}r\right)^2$$
$$-\frac{4(1+p^2+q^2)}{(1+p^2)}\left\{\left(\frac{1+p^2+q^2}{(1+p^2)} - (1+q^2)\right)r^2 + 2pqrs - (1+p^2)s^2\right\}$$

oder:

$$\left(v - \frac{2(1+p^2+q^2)}{1+p^2}r\right)^2 + 4(1+p^2+q^2)\left(\frac{pqr}{1+p^2} - s\right)^2,$$

also in der That einen immer positiven Ausdruck.

Noch eine andere specielle Form, die nicht ohne Interesse ist, gilt für den Fall, dass in der Gleichung der Fläche $F(x, y, z) = 0$ die Variabeln getrennt sind, dass sie also, wenn X eine Function von x allein, Y eine Function von y allein, Z eine Function von z allein bedeutet, die Form hat $X + Y + Z = 0$, wie dies z. B. bei den Paraboloiden und den Flächen zweiten Grades der Fall ist, welche einen Mittelpunkt haben. Es wird nämlich alsdann

$$P = X', \; Q = Y', \; R = Z'; \; L = X'', \; M = Y'', \; N = Z'';$$
$$L' = 0, \; M' = 0, \; N' = 0,$$

und somit die Gleichung § 57, 2):

$$0 = P^2(M-K)(N-K) + Q^2(N-K)(L-K) + R^2(L-K)(M-K)$$

oder wenn man mit dem Producte $(L-K)(M-K)(N-K)$ dividirt:

$$0 = \frac{P^2}{L-K} + \frac{Q^2}{M-K} + \frac{R^2}{N-K}$$

oder endlich

$$0 = \frac{X'^2}{X''-K} + \frac{Y'^2}{Y''-K} + \frac{Z'^2}{Z''-K}.$$

Zum Beispiel wird für die Flächen zweiten Grades, welche einen Mittelpunkt haben, und die in der Gleichung

$$\frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{2}y^2 + \frac{C}{2}z^2 - \frac{1}{2} = 0$$

enthalten sind, jeder der beiden Hauptkrümmungsradien gegeben durch

$$\varrho = \frac{-\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}{K},$$

wo man für K nacheinander die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $0 = \frac{A^2x^2}{A-K} + \frac{B^2y^2}{B-K} + \frac{C^2z^2}{C-K}$ einzusetzen hat.

Auch über die Richtung, in welcher bei einer Fläche zweiten Grades, die einen Mittelpunkt hat, die Hauptkrümmungsradien zu liegen kommen, können wir uns leicht Aufschluss verschaffen. Der Krümmungsradius irgend eines Normalschnittes war gegeben durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{-\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + 2L'\beta\gamma + 2M'\alpha\gamma + 2N'\alpha\beta}.$$

Hiernach erhält man z. B. für das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ folgenden Ausdruck:

$$\varrho = \frac{-\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}{\frac{1}{a^2}\alpha^2 + \frac{1}{b^2}\beta^2 + \frac{1}{c^2}\gamma^2}.$$

Die Ausdrücke in Zähler und Nenner sind leicht zu interpretiren. Legt man nämlich an den betreffenden Punkt (x, y, z) eine Tangentialebene, so ist die Gleichung derselben $\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} + \frac{\zeta z}{c^2} - 1 = 0$. Daraus folgt: die Entfernung p des Mittelpunktes des Ellipsoids von dieser Ebene ist

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}};$$

der Zähler des Ausdrucks für ϱ ist also der reciproke Werth von p. Da ferner α, β, γ die Cosinus der Winkel sind, welche die Tangente des Normalschnitts mit den drei Axen bildet, so sind, wenn man dieser Tangente einen Radius des Ellipsoids parallel zieht und seine Länge vom Mittelpunkte bis zur Fläche mit d bezeichnet, die Coordinaten seines Endpunktes $d\alpha, d\beta, d\gamma$, für welche die Gleichung des Ellipsoids gelten muss, so dass also

$$d^2 \left\{ \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right\} - 1 = 0$$

ist. Demnach ist zweitens gefunden: der Nenner von ϱ ist der reciproke Werth von d^2. Es ist also der Krümmungsradius jedes Normalschnittes $\varrho = \frac{d^2}{p}$, wo d der Radius ist, der der Tangente des Normalschnitts parallel geht, und p die Entfernung der Tangentialebene vom Mittelpunkte. Für das System aller Normalschnitte, welche in einem Punkte des Ellipsoids möglich sind, bleibt nun p ungeändert, d beschreibt eine Ellipse parallel der Tangentialebene. Daraus geht hervor, welches die Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung sein werden: man hat für sie nur die Hauptaxen des Diametralschnitts zu bestimmen. Wir haben also den Satz: Bei einem Ellipsoid, oder, da die Vorzeichen von a^2, b^2, c^2 nicht in Betracht gekommen sind, allgemein: **Bei jeder Fläche zweiten Grades mit einem Mittelpunkte erhält man die Richtungen des am meisten und des am wenigsten gekrümmten Normalschnitts,** indem man zuerst die Hauptaxen desjenigen Diametralschnitts bestimmt, der der Tangentialebene parallel ist, und vom gegebenen Punkte der Fläche aus Tangenten zieht, welche diesen Axen parallel sind.

Vergleichen wir hiermit die § 53 gefundene auf die Indicatrix bezügliche Formel $r = \sqrt{\frac{2\zeta}{\varkappa}}$ oder, wenn wir $\varkappa = \frac{1}{\varrho}$ setzen, $r^2 = 2\varrho\zeta$, so erhalten wir $\frac{r^2}{d^2} = \frac{2\zeta}{p}$, also, da ζ und p für jede Tangentialebene

constant sind, ergiebt sich $\frac{r}{d} = \text{const.}$, d. h. die Indicatrix ist der ihr parallel durch den Mittelpunkt gelegten Ellipse ähnlich und ähnlich liegend. Es sind also auch je zwei conjugirte Radien dieser letzteren den entsprechenden conjugirten Tangenten parallel. Dies folgt übrigens schon daraus, dass parallele Querschnitte eines Ellipsoids ähnliche und ähnlich liegende Durchschnitte geben.

Es bietet sich hier zugleich eine andere Frage dar: Giebt es Punkte, wo alle Normalschnitte dieselbe Krümmung haben? Dies kann nur da sein, wo die Tangentialebene parallel ist den Kreisschnitten. Wir kommen bald noch auf solche Punkte, die man Nabelpunkte oder Punkte sphärischer Krümmung nennt, zurück, und bemerken nur, dass das Ellipsoid ihrer vier hat, welche in der Ebene der grössten und kleinsten Axe liegen.

§ 59.

Wir wollen unsere Formeln nun noch specialisiren für die Rotationsflächen. Eine Rotations- oder Revolutions-Fläche ist eine Fläche, die entsteht, indem eine Curve sich um eine Axe bewegt. Jeder Punkt der rotirenden Curve erzeugt bei der Bewegung einen Kreis, dessen Ebene durch die auf ihr normale Axe im Mittelpunkte getroffen wird. Offenbar aber kann man jede Rotationsfläche entstanden denken durch Rotation einer ebenen Curve in Bezug auf eine in ihrer Ebene liegende Gerade. Denkt man sich nämlich irgend eine doppelt gekrümmte Curve um irgend eine Axe rotiren, bis sie die Rotation vollendet, und in der entstehenden Fläche einen ebenen Schnitt durch die Rotationsaxe gelegt, so erhält man dadurch diejenige ebene Curve, deren Rotation um dieselbe Axe dieselbe Fläche hervorbringt.

Wollen wir nun die Hauptkrümmungsradien einer jeden Rotationsfläche finden, so kommt es zunächst darauf an, die Gleichung dieser Art Flächen aufzustellen. Die Gleichung der rotirenden Curve, welche wir als eben annehmen, wird, wenn wir die Rotationsaxe zur z-Axe wählen, die Form haben $z = f(\xi)$. Wenn diese Curve rotirt, so behält während der Rotation jeder Punkt unverändert sein z, es ändern sich aber die beiden andern Coordinaten x und y, so jedoch, dass die Entfernung des Punktes von der z-Axe, nämlich $\sqrt{x^2 + y^2}$, immer dieselbe bleibt, und zwar ξ. Es ist also die Gleichung jeder Rotationsfläche, wenn die z-Axe Rotationsaxe ist, $z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ oder auch $z = \varphi\,(x^2 + y^2)$, wenn man $f(\xi) = \varphi(\xi^2)$ setzt, d. h. in der Gleichung der Fläche kommen, wenn man sie nach z auflöst,

die Coordinaten x und y nur so vor, dass der Werth von z als Function von $x^2 + y^2$ gegeben ist.

Wir wollen in der folgenden Untersuchung die Gleichung der Fläche so schreiben: $z = f(\xi)$, wo $\xi^2 = x^2 + y^2$, und wenden nun zur Auffindung der Halbmesser der grössten und kleinsten Krümmung im Punkte (x, y, z) die in § 58 erwähnte Form der allgemeinen Gleichung 2) des § 57 an, weil die Gleichung der Fläche nach z aufgelöst ist. Wir bilden uns zu dem Ende die Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung:

$$p = f'(\xi)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x},\quad q = f'(\xi)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y};\quad r = f''(\xi)\cdot\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + f'(\xi)\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2};$$

$$s = f''(\xi)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y} + f'(\xi)\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x\cdot\partial y},\quad t = f''(\xi)\cdot\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + f'(\xi)\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}.$$

Dabei ist $\qquad \xi\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} = x,\quad \xi\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y} = y$

und folglich

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \xi\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 1,\ \frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y} + \xi\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x\cdot\partial y} = 0,\ \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \xi\,\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = 1,$$

also

$$p = f'\cdot\frac{x}{\xi},\quad q = f'\cdot\frac{y}{\xi};\quad r = f''\cdot\frac{x^2}{\xi^2} + f'\cdot\frac{\xi^2 - x^2}{\xi^3} = f''\cdot\frac{x^2}{\xi^2} + f'\cdot\frac{y^2}{\xi^3};$$

$$s = f''\cdot\frac{xy}{\xi^2} - f'\cdot\frac{xy}{\xi^3},\quad t = f''\cdot\frac{y^2}{\xi^2} + f'\cdot\frac{x^2}{\xi^3}.$$

Diese Ausdrücke hätten wir nun in die oben erwähnte Gleichung für ϱ einzusetzen, und wo möglich die dadurch entstehende Gleichung zu vereinfachen. Da sich aber innerhalb desselben Parallelkreises die Punkte der Fläche in jeder Weise gleich verhalten, so können wir für die folgende Entwicklung einen beliebigen Punkt eines solchen Parallelkreises zu Grunde legen und das Resultat wird allgemein für jeden Punkt des Parallelkreises gelten. Wir wählen, weil dadurch die Untersuchung am einfachsten wird, denjenigen Punkt, wo die Fläche die zx-Ebene schneidet: dort ist $y = 0$, also $x = \xi$ und

$$p = f',\quad q = 0;\quad r = f'',\quad s = 0,\quad t = f'\cdot\frac{1}{\xi}.$$

Danach wird die Gleichung für ϱ

$$\frac{f'f''}{\xi}\,\varrho^2 - \left(f'' + (1 + f'^2)\,\frac{f'}{\xi}\right)\sqrt{1 + f'^2}\cdot\varrho + (1 + f'^2)^2 = 0,$$

welche wir auch so schreiben können:

$$\varrho^2 - \left(\frac{\xi\sqrt{1 + f'^2}}{f'} + \frac{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''}\right)\varrho + \frac{\xi\,(1 + f'^2)^2}{f'f''} = 0,$$

in welcher Form man sogleich erkennt, dass die beiden Wurzeln für ϱ sind:

$$\frac{\xi\sqrt{1+f'^2}}{f'} \text{ und } \frac{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''}.$$

Da die Gleichung $z = f(\xi)$ die der Meridiancurve ist, so ist die zweite Wurzel ϱ zugleich der Krümmungsradius des Meridians; mithin ist der Krümmungsradius des Meridians der Krümmungsradius eines Hauptschnitts. Der zweite Hauptschnitt steht normal auf diesem.

Fig. 24.

Sein Krümmungsradius ist $\frac{\xi\sqrt{1+f'^2}}{f'}$, ein Ausdruck, welcher sich auch leicht geometrisch deuten lässt. Denkt man sich nämlich an die Meridiancurve im Punkte M (Fig. 24) eine Tangente MA gezogen, welche die z-Axe unter dem Winkel α schneidet, so ist auch der Winkel der Abscisse MC mit der Normale MB des vorliegenden Punktes gleich α.

Es ist aber f' oder $\frac{dz}{dx} = \cos\alpha$, also $\frac{\sqrt{1+f'^2}}{f'} = \frac{1}{\cos\alpha}$ und mithin die Grösse des zweiten Hauptkrümmungshalbmessers $= \frac{\xi}{\cos\alpha}$, d. i. gleich der Normale vom Curvenpunkte bis zur z-Axe. Wir haben also folgenden Satz:

Die Hauptkrümmungsradien in einem Punkte einer Umdrehungsfläche sind an Länge gleich dem Krümmungradius des Meridians in jenem Punkte und resp. dem Stück der Normale des Meridians in jenem Punkte, welches zwischen dem Punkte und der z-Axe liegt. Dass die Hauptschnitte selbst bezüglich der Meridian und der auf ihm normale Schnitt sind, ergiebt sich hieraus leicht. Der Kreis, den Punkt M beschreibt, steht nämlich in diesem Punkte auf der Meridianebene, und folglich auch auf der Normale des Meridians senkrecht. Die letztere ist also auch Normale der Fläche. Die beiden betrachteten Schnitte sind also Normalschnitte und da ihre Krümmungsradien Maximum und Minimum sind, Hauptschnitte.

§ 60.

Die zweite Definition der Hauptschnitte, dass nämlich die Flächennormalen zweier benachbarten Punkte der Flächen in ihnen in einer Ebene liegen, führt natürlich auf dieselben Gleichungen 1) und 2) des § 57.

Seien ξ, η, ζ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkes, λ, μ, ν die Richtungscosinus der Normale, ϱ der Krümmungsradius, so ist:

$$\xi - x = \varrho\lambda, \quad \eta - y = \varrho\mu, \quad \zeta - z = \varrho\nu.$$

Für den nächsten Punkt der Fläche im Hauptschnitte sind $x\cdots$

$\lambda \cdots$ bezüglich durch $x + dx \cdots \lambda + d\lambda \cdots$ zu ersetzen, während unserer Definition gemäss $\varrho, \xi, \eta, \zeta$ unverändert bleiben, und man erhält:

$$dx + \varrho d\lambda = 0, \quad dy + \varrho d\mu = 0, \quad dz + \varrho d\nu = 0,$$

oder:

$$\alpha + \varrho\lambda' = 0, \quad \beta + \varrho\mu' = 0, \quad \gamma + \varrho\nu' = 0,$$

wo α, β, γ die Bedeutung in § 57 behalten.

Sei noch $S^2 = P^2 + Q^2 + R^2$, so ist:

$$\alpha + \varrho \frac{d\left(\frac{P}{S}\right)}{ds} = 0, \quad \beta + \varrho \frac{d\left(\frac{Q}{S}\right)}{ds} = 0, \quad \gamma + \varrho \frac{d\left(\frac{R}{S}\right)}{ds} = 0,$$

von welchen Gleichungen sich die erste auch schreiben lässt:

A) $$S\alpha + \varrho \frac{dP}{ds} - \frac{P\varrho dS}{Sds} = 0,$$

und ähnlich die beiden anderen Gleichungen.

Setzt man endlich für S seinen Werth $-K\varrho$ und berücksichtigt, dass

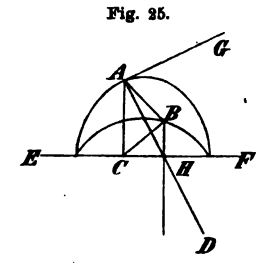
$$\frac{dP}{ds} = L\alpha + N'\beta + M'\gamma$$

ist, so hat man Formeln 1) des § 57, wo $\varepsilon' = -\frac{dS}{Sds}$ gesetzt ist, und aus diesen ergiebt sich Formel 2) wie oben; man erhält diese Formel auch direct, wenn man für $\frac{dS}{Sds}$ seinen Werth setzt.

Aus der hier gegebenen Definition der Hauptschnitte ergeben sich durch einfache geometrische Betrachtungen die Lagen der Hauptschnitte und der Hauptkrümmungsradien für die Rotationsflächen.

Die Normale der Erzeugungscurve AD (Fig. 25) in irgend einer Lage derselben (der Meridiancurve) ist nämlich zugleich Flächennormale. Denn werde von Punkt A der Erzeugungscurve der unendlich kleine Bogen AB beschrieben, so stehen die Radien dieses Bogens AC und CB und folglich auch AB selbst auf der Rotationsaxe EF senkrecht. Da aber AB auch auf Radius AC senkrecht steht, so ist AB ein Loth auf die Ebene der Meridiancurve EAF, die Normale AD der letzteren steht also sowohl auf Tangente AG derselben als auch auf Tangente AB, welche beide Tangenten der Tangentialebene angehören, senkrecht, und ist somit eine Flächennormale. Da nun zwei nächste Normalen der Meridiancurve sich in ihrem Krümmungsmittelpunkte schneiden, so ist die Meridianebene ein Hauptschnitt und ihr Krümmungsradius Hauptkrümmungsradius.

Fig. 25.



Was nun den zweiten Hauptschnitt anbetrifft, so beschreibt die Normale AD bei der Rotation eine Kegelfläche, deren Spitze H in der Rotationsaxe liegt, in dieser schneiden sich also ebenfalls zwei nächste Normalen, der auf der Rotationsaxe senkrechte Kreis bildet also die zweiten Hauptschnitte und der zugehörige Krümmungsradius ist das Stück der Normale von der Fläche bis zur Rotationsaxe.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir noch die Bemerkung machen, dass die dritte Definition der Hauptschnitte, dass nämlich die in ihnen enthaltenen Tangenten auf ihren conjugirten senkrecht stehen, eine unmittelbare Folge der zweiten Definition ist. Denn seien (Fig. 25) A und B zwei auf einander folgende Punkte eines Hauptschnittes einer jetzt beliebigen Fläche. Legen wir durch A und B Tangentialebenen, die sich in AG schneiden, so sind AB und AG conjugirte Tangenten. Die Normale in B und die in A, also AH und BH, welche sich vermöge der zweiten Definition in H schneiden mögen, stehen dann auf AG senkrecht und folglich steht auch AB auf AG senkrecht.

Die Punkte sphärischer Krümmung (Nabelpunkte).

§ 61.

Es kann vorkommen, dass in gewissen Punkten einer Fläche beide Hauptkrümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 gleich werden und auch gleiches Vorzeichen haben. Dann giebt der Euler'sche Satz, für jeden andern Krümmungsradius ϱ:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1}(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = \frac{1}{\varrho_1};$$

es haben also in diesem Falle alle Normalschnitte gleiche Krümmung. Dann ist die Indicatrix ein Kreis. Die Punkte aber, in welchen dies stattfindet, heissen Punkte sphärischer Krümmung oder Nabelpunkte, und es ist leicht zu sehen, dass in diesen die Fläche mit einer Kugel eine Osculation zweiter Ordnung hat.

Suchen wir nun die Bedingungen, unter welchen die Nabelpunkte stattfinden. Es muss dann die Gleichung des § 58 für ϱ:

$$(rt - s^2)\varrho^2 - ((1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t)\,\varrho\sqrt{1 + p^2 + q^2} + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0$$

zwei gleiche Wurzeln haben, d. h. es muss (§ 58)

$$((1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r)^2 = 4(1 + p^2 + q^2)(rt - s^2)$$

sein. Diese Gleichung in Verbindung mit der Fläche gäbe nun allerdings eine Curve, sodass eine Linie sphärischer Krümmung vor-

handen wäre. Jedoch zeigen wir sogleich, dass eine solche nur ausnahmsweise vorhanden sein kann, indem obige Gleichung im Allgemeinen in zwei andere zerfällt, also nur einzelne Punkte giebt. Wie nämlich bereits § 58 gezeigt wurde, setzt diese Gleichung das Bestehen der folgenden voraus:

$$\left(v - \frac{2(1+p^2+q^2)}{1+p^2}r\right)^2 + 4(1+p^2+q^2)\left(\frac{pqr}{1+p^2} - s\right)^2 = 0.$$

Diese Gleichung aber ist nur zu erfüllen, wenn die beiden darin enthaltenen Quadrate verschwinden, also

$$v = \frac{2(1+p^2+q^2)}{1+p^2}r \quad \text{und} \quad \frac{pqr}{1+p^2} = s \quad \text{ist.}$$

Setzt man hier für v seinen Werth:

$$(1+p^2)t - 2pqs + (1+p^2)r,$$

so lauten diese beiden Gleichungen:

$$\frac{s}{pq} = \frac{r}{1+p^2} = \frac{t}{1+q^2},$$

wenn nicht etwa die beiden Ausdrücke unter dem Quadratzeichen einen gemeinschaftlichen Factor haben, in welchem Falle dann in der That eine Linie sphärischer Krümmung vorhanden ist.

Es ist hier nur davon ausgegangen, dass die Hauptkrümmungen gleich sind. Geht man aber von dem Satze aus, dass sämmtliche Normalschnitte gleiche Krümmungen haben, und gehen wir von der Gleichung $z = \varphi(x, y)$ des § 58 aus, so erhalten wir für einen beliebigen Normalschnitt:

$$\varrho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{K}\text{*)}$$

und

1) $K = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta^2 + t\beta^2 = 0, \quad \gamma = p\alpha + q\beta, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$

also nach Elimination von γ:

2) $$(1+p^2)\alpha^2 + 2pq\alpha\beta + (1+q^2)\beta^2 = 1.$$

Diese beiden Gleichungen geben, wenn man $\frac{\beta}{\alpha} = z$ setzt:

$K = \alpha^2(r + 2sz + tz^2)$ und $\alpha^2(1 + p^2 + 2pqz + (1+q^2)z^2) = 1,$

also nach Elimination von α^2:

$$K(1+p^2) - r + 2(Kpq - s)z + \{K(1+q^2) - t\}z^2 = 0.$$

Diese Formel gilt allgemein. Sollen aber alle Krümmungsradien im betreffenden Punkte, also alle Werthe von K gleich sein, welche beliebigen Werthen von z entsprechen, so müssen die mit z^0, z^1, z^2 multiplicirten Glieder einzeln verschwinden, und dies giebt dann:

---

*) Siehe Note zu Seite 112.

$$K = \frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2},$$

also die obigen Gleichungen.

Es sollen hiernach die Nabelpunkte des Ellipsoids bestimmt werden. Aus der Gleichung desselben

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

erhalten wir:

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z}, \quad r = -\frac{c^2(a^2 z^2 + c^2 x^2)}{a^4 z^3},$$

oder

$$r = -\frac{c^4(b^2 - y^2)}{a^2 b^2 z^3}, \quad s = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}, \quad t = -\frac{c^2(b^2 z^2 + c^2 y^2)}{b^4 z^3},$$

oder

$$t = -\frac{c^4(a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3},$$

ferner:

$$1 + p^2 = \frac{a^4 z^2 + c^4 x^2}{a^4 z^2}, \quad 1 + q^2 = \frac{b^4 z^2 + c^4 y^2}{b^4 z^2}.$$

Die Gleichung $pqr = s(1 + p^2)$ giebt dann:

$$c^2 xy(a^2 z^2 + c^2 x^2) = xy(a^4 z^2 + c^4 x^2),$$

wenn wir von dem Factor z^5 absehen. Diese Gleichung ist nur zu erfüllen, wenn x oder y gleich Null ist.

Die Gleichung: $t(1 + p^2) = r(1 + q^2)$ aber giebt:

$$(b^2 z^2 + c^2 y^2)(a^4 z^2 + c^4 x^2) = (a^2 z^2 + c^2 x^2)(b^4 z^2 + c^4 y^2).$$

Sei nun b die mittlere Halbaxe und setzen wir $x = 0$, so erhalten wir:

$$a^4(b^2 z^2 + c^2 x^2) = a^2(b^4 z^2 + c^4 y^2),$$

oder:

$$a^2 b^2(a^2 - b^2) z^2 = a^2 c^2(c^2 - a^2) y^2,$$

eine unmögliche Gleichung, da beide Seiten verschiedene Vorzeichen haben.

Ist dagegen $y = 0$, so erhalten wir:

$$a^2 b^2(a^2 - b^2) z^2 = b^2 c^2(b^2 - c^2) x^2,$$

woraus sich

$$\frac{x}{z} = \pm \frac{a}{c} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}$$

also als reelle Grösse ergiebt. Der Fall, wo $z = 0$ wäre, der noch zu erwägen ist, da wir vorhin von dem Factor z^5 abgesehen haben, ergiebt sich ebenfalls als unmöglich, wie man ersieht, wenn man x mit z vertauscht, und demgemäss die Grössen $p, q, r \cdots$ als Differentialquotienten von x nach z und y betrachtet. Es liegen also die Nabelpunkte in der Ebene der grössten und kleinsten Axe und werden durch die obige Gleichung:

$$x = \pm \frac{az}{c} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}},$$

oder, da $y = 0$, $a^2 z^2 = c^2(a^2 - x^2)$ ist, durch die beiden Gleichungen:

$$(a^2 - b^2)(a^2 - x^2) = (b^2 - c^2)x^2 \text{ d. h. } a^2(a^2 - b^2) = x^2(a^2 - c^2)$$

und
$$c^2(b^2 - c^2) = z^2(a^2 - c^2)$$

bestimmt; durch Combination der Zeichen ergeben sich also vier Nabelpunkte, für welche man hat:

$$x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Für diese vier Nabelpunkte bemerken wir noch Folgendes. Wir haben bereits gezeigt, dass für dieselben die Indicatrix ein Kreis ist, an anderer Stelle (§ 58) aber wurde bewiesen, dass der durch den Mittelpunkt gelegte, der Indicatrix parallele Schnitt derselben ähnlich ist, also sind auch diese Schnitte für die Nabelpunkte Kreise. Da aber die Nabelpunkte symmetrisch liegen, so sind die Indicatrices oder die Tangentialebenen für je zwei derselben parallel, und man hat den Satz: „Legt man durch den Mittelpunkt eines Ellipsoids die beiden Kreisschnitte, so sind deren Ebenen je zweien durch die Nabelpunkte gehenden Tangentialebenen parallel.“

Formeln für die conjugirten Tangenten.

§ 62.

Es sollen jetzt die Formeln gegeben werden, durch welche die Lage zweier conjugirten Tangenten bestimmt wird. Die eine derselben kann willkürlich, also so angenommen werden, dass sie irgend eine auf der Fläche befindliche Curve berührt. Seien λ, μ, ν die Richtungscosinus der Flächennormale mit den Axen, α, β, γ die einer gegebenen Tangente, a, b, c die der gesuchten conjugirten.

Man hat dann:

$$1) \quad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0, \qquad 2) \quad a\lambda + b\mu + c\nu = 0.$$

Nun steht aber die conjugirte Tangente, die ja die Schnittlinie zweier nächsten Tangentialebenen ist, auch auf der nächsten durch unsere Curve gehenden Flächennormale senkrecht, und man hat, wenn λ', μ', ν' die Differentialquotienten nach dem Bogen s der Curve genommen sind:

$$3) \qquad a\lambda' + b\mu' + c\nu' = 0;$$

aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich dann:

$$4) \qquad ha = \mu\nu' - \nu\mu', \quad hb = \nu\lambda' - \lambda\nu', \quad hc = \lambda\mu' - \mu\lambda'.$$

Bilden wir die Summe der Quadrate beider Seiten dieser Gleichungen, so erhalten wir:

$$h^2 = \mu'^2(1-\mu^2) + \nu'^2(1-\nu^2) + \lambda'^2(1-\lambda^2)$$
$$- 2\mu\mu'\nu\nu' - 2\nu\nu'\lambda\lambda' - 2\lambda\lambda'\mu\mu' \quad \text{oder:}$$

5) $$h^2 = \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2.$$

Es sind also a, b, c vollständig bestimmt; die Grössen λ', μ', ν' ergeben sich nämlich aus den Gleichungen derjenigen Curve, welcher die gegebene Tangente angehört. Ist noch ϑ der Winkel zwischen beiden conjugirten Tangenten, so ist:

$$\cos\vartheta = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Wir können aber auch statt der Cosinus λ, μ, ν die ihnen proportionalen Grössen P, Q, R einführen. Es gelten offenbar noch die Gleichungen 1 bis 3, wenn man λ, μ, ν mit P, Q, R vertauscht, also hat man statt Gleichung 4)

6) $$ga = QR' - RQ', \quad gb = RP' - PR', \quad gc = PQ' - QP',$$

wo P', Q', R' die Differentialquotienten nach dem Bogen s genommen sind. Auf gleiche Weise wie die Gleichung 5) erhalten wir dann, wenn wieder $P^2 + Q^2 + R^2 = S^2$, also $PP' + QQ' + RR' = SS'$ gesetzt wird:

7) $$g^2 = S^2(P'^2 + Q'^2 + R'^2 - S'^2),$$

die Grössen P', Q', R' ergeben sich dann wieder

$$P' = L\alpha + N'\beta + M'\gamma \quad \text{u. s. w.}$$

Suchen wir aber die Bedingung, unter welcher zwei conjugirte Tangenten aufeinander senkrecht stehen, so haben wir ausser den obigen Gleichungen:

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0, \quad a\lambda + b\mu + c\nu = 0, \quad a\lambda' + b\mu' + c\nu' = 0$$

noch: $$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Aus den drei letzten ergiebt sich:

$$\lambda' + h\alpha + k\lambda = 0, \quad \mu' + h\beta + k\mu = 0, \quad \nu' + h\gamma + k\nu = 0.$$

Wenn man aber bezüglich mit λ, μ, ν multiplicirt und addirt, giebt die erste Gleichung $k = 0$ und man hat wieder die Gleichungen des Hauptschnittes $\lambda' = h\alpha$, $\mu' = h\beta$, $\nu' = h\gamma$ § 60, wenn $h = -\frac{1}{\varrho}$; also einen andern Beweis, dass nur die Hauptschnitte conjugirte Tangenten enthalten, die aufeinander senkrecht stehen. Die conjugirten Tangenten auf dem Ellipsoid bestimmen sich sehr leicht, da sie nach § 58 je zwei conjugirten Durchmessern parallel sind.

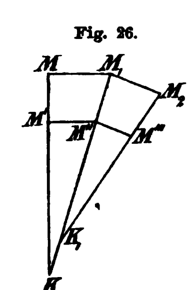
Die Krümmungslinien.

§ 63.

Durch einen beliebigen Punkt M einer Fläche denken wir uns einen Hauptschnitt gelegt, durch den benachbarten Punkt M_1 der Fläche, welcher in diesen Hauptschnitt fällt, einen zweiten, und zwar von den beiden Hauptschnitten denjenigen, dessen Tangente mit MM_1 einen unendlich kleinen Winkel bildet und so fort. Die Punkte MM_1M_2 bilden alsdann eine Curve, welche man Krümmungscurve oder Krümmungslinie nennt.

Da sich nun durch jeden Punkt M zwei Hauptschnitte legen lassen, so erhalten wir für diesen Punkt zwei in demselben sich schneidende Krümmungslinien. Verfahren wir so für jeden Punkt, so theilen die entstehenden Krümmungslinien von beiderlei Gattung die Fläche in unendlich kleine Vierecke, in denen sich je zwei Seiten unter einem rechten Winkel schneiden. Die Richtungen der anstossenden Seiten eines solchen Vierecks bezeichnen immer zwei conjugirte Tangenten (Fig. 26). Seien nun MM_1 und MM' zwei solcher Seiten, M_1M'' die MM'' gegenüberliegende, also die Schnittlinie der durch M und M_1 gehenden Tangentialebene, so liegen MM' und M_1M'' in einer Ebene, nämlich der Tangentialebene von M_1. Das Viereck also ist ein ebenes. Offenbar tritt dasselbe ein, wenn man durch jeden Punkt der Fläche statt der Haupttangenten beliebig continuirliche Systeme conjugirter Tangenten legt. Auch dann wird die Fläche in ebene unendlich kleine Vierecke getheilt, die sich aber nicht unter rechtem Winkel schneiden. Jede andere Theilung der Fläche durch zwei Curvenschaaren giebt aber keine ebenen Vierecke, da nur drei Punkte eine Ebene bestimmen, vielmehr machen die Dreiecke, in welche ein solches Viereck zerfällt, mit einander einen freilich unendlich kleinen Winkel. Es können also die beiden Systeme von Krümmungslinien auch definirt werden als diejenigen Curvenschaaren, welche die Fläche in unendlich kleine ebene Vierecke mit je einem rechten Winkel theilen. Sei K der Schnittpunkt von MM' und M_1M'', K_1 der von M_1M'' und M_2M''' u. s. w., wo $M_1M''M'''M_2$ das nächste Viereck ist, dann bilden die Haupttangenten MK, M_1K_1, M_2K_2, welche eine Krümmungslinie MM_1M_2 senkrecht schneiden, eine abwickelbare Fläche, und es entstehen auf diese Weise zwei Schaaren abwickelbarer Flächen (§ 29). Jede Krümmungslinie aber

Fig. 26.



bestimmt noch eine andere abwickelbare Fläche, dieselbe wird durch die Normalen der Fläche gebildet, welche durch diese Krümmungslinie gehen, da ja auch zwei aufeinander folgende dieser Normalen in einer Ebene liegen. Wir bezeichnen die Schnittpunkte derselben als Krümmungsmittelpunkte. Sämmtliche Krümmungsmittelpunkte einer Krümmungslinie bestimmen nun eine Curve. Diese nennen wir analog der Bezeichnung bei ebenen Curven Evolute der Krümmungslinie. Es giebt also für jede Fläche zwei Systeme solcher Evoluten. Ein jedes dieser Systeme giebt dann eine Fläche, die wir Evolutenfläche der gegebenen nennen. Es lässt sich leicht begreifen, und wird im Folgenden nachgewiesen werden, dass beide Evolutenflächen im Allgemeinen durch dieselbe Gleichung erhalten werden, also nur eine Fläche bilden. Nur in Aufnahmsfällen tritt hier eine Trennung ein. Dies ist z. B. bei den Rotationsflächen der Fall. Es wurde bereits gezeigt, dass die Hauptschnitte einer solchen in die Meridian- und Parallelkreise fallen und diese beiden Curvenschaaren bilden somit die Krümmungslinie. Die Evolute eines Meridians ist nun die Linie der Krümmungsmittelpunkte eines solchen, und die entsprechende Evolutenfläche ist diejenige Rotationsfläche, welche durch Drehung dieser Evolute um die Axe der gegebenen Fläche entsteht. Die Krümmungsmittelpunkte der Parallelkreise aber schneiden sich sämmtlich in der Axe, statt der zweiten Evolutenfläche erhält man also eine Linie, nämlich die Axe selbst.

§ 64.

Suchen wir jetzt die Gleichung einer Krümmungslinie, welche sie in Gemeinschaft mit der Flächengleichung bestimmt.

Wir gehen von den Gleichungen des § 60 A) für die Hauptschnitte aus:

$$S\alpha + \varrho\frac{dP}{ds} - P\varrho\frac{dS}{Sds} = 0,$$

$$S\beta + \varrho\frac{dQ}{ds} - Q\varrho\frac{ds}{Sds} = 0,$$

$$S\gamma + \varrho\frac{\partial R}{ds} - R\varrho\frac{ds}{Sds} = 0.$$

Eliminirt man hier $\frac{dS}{ds}$, so ergiebt sich:

$$QS\alpha + Q\varrho\frac{dP}{ds} = PS\beta + P\varrho\frac{dQ}{ds}$$

und

$$RS\alpha + R\varrho\frac{dP}{ds} = PS\gamma + P\varrho\frac{dR}{ds},$$

oder, wenn man auch ϱ eliminirt,

$$(Q\alpha - P\beta)\left(P\frac{dR}{ds} - R\frac{dP}{ds}\right) = (R\alpha - P\gamma)\left(P\frac{dQ}{ds} - Q\frac{dP}{ds}\right),$$

oder, wenn man statt α, β, γ die proportionalen Grössen dx, dy, dz schreibt und den Nenner ds weglässt:

$$dP(Qdz - Rdy) + dQ(Rdx - Pdz) + dR(Pdy - Qdx) = 0.$$

In dieser Differentialgleichung ist noch

$$dP = Ldx + N'dy + M'dz$$

u. s. w. zu setzen.

Einfacher wird diese Gleichung, wenn man wieder die Gleichung der Fläche $z = f(x, y)$ schreibt, also: $P = p$, $Q = q$, $R = -1$ setzt, man hat dann:

$$\frac{pdz + dx}{dp} = \frac{qdz + dy}{dq},$$

oder, wenn

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy$$

geschrieben wird:

$$dx^2(pqr - (1 + p^2)s) + dxdy((1 + q^2)r - (1 + p^2)t) \\ + dy^2((1 + q^2)s - pqt) = 0.$$

Ist nun die Gleichung einer Krümmungscurve bekannt, so lässt sich leicht die Gleichung für die Evolute derselben finden. In den § 60 gefundenen Gleichungen nämlich:

$$\xi - x = \varrho\lambda, \quad \eta - y = \varrho\mu, \quad \zeta - z = \varrho\nu,$$

wo ϱ der Krümmungsradius, λ, μ, ν die Cosinus der Winkel der Normale mit den Axen, ξ, η, ζ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes waren, sind wegen der Gleichungen der Krümmungslinie und der Flächengleichung $\varrho, \lambda, \mu, \nu$ als Functionen von x, y, z bekannt, man hat also fünf Gleichungen, aus denen nach Elimination von x, y, z sich zwei Gleichungen ergeben, die nur ξ, η und ζ enthalten. Da die Gleichung der Krümmungslinie aber durch Integration entstanden ist und mithin eine Constante enthält, so kann man diese aus den beiden so gefundenen Gleichungen eliminiren und erhält so die Gleichung der Evolutenfläche.

§ 65.

Beispiel. Die Krümmungslinie der beiden Paraboloide zu bestimmen.

Wir schreiben die Gleichungen der letzteren unter der Form $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$, dann ist $p = \frac{x}{a}$, $q = \frac{y}{b}$, $r = \frac{b}{a}$, $s = 0$, $t = \frac{1}{b}$; dies in unsere Gleichung gesetzt giebt:

$$bxy\,dx^2 + dx\,dy\{ab(b-a) + ay^2 - bx^2\} - axy\,dy^2 = 0.$$

Um diese Gleichung zu integriren, multipliciren wir sie mit $x \cdot y$, worauf wir sie so schreiben können:

$$b \cdot y^2(x \cdot dx)^2 + \{ab(b-a) + ay^2 - bx^2\}(xdx)(ydy) - ax^2(y \cdot dy)^2 = 0,$$

oder $x^2 = X$, $y^2 = Y$ gesetzt:

$$Yb(dX)^2 + (ab(b-a) + aY - bX)dXdY - aX(dY)^2 = 0,$$

d. h.

$$Y\{b(dX)^2 + adXdY\} = X(bdXdY + a(dY)^2) + (ab)(a-b)dXdY$$

oder wenn man $\frac{dY}{dX} = Y'$ setzt:

$$Y = XY' + ab(a-b)\frac{Y'}{b+aY'}.$$

Diese Gleichung ist ein besonderer Fall der sogenannten Clairaut'schen

$$Y = XY' + \varphi(Y').$$

Letztere giebt durch Differentiiren:

$$X\frac{dY'}{dX} = \varphi'(Y')\frac{dY'}{dX}.$$

Also entweder: $X = \varphi'(Y')$, was jedoch nur eine singuläre Auflösung ist, oder $\frac{dY'}{dX} = 0$, $Y' = c$; dieser Werth in die Clairaut'sche Gleichung gesetzt, giebt: $Y = cX + \varphi(c)$, und für unsern speciellen Fall:

$$Y = cX + \frac{ab(a-b)c}{b+ac}, \quad y^2 = cx^2 + \frac{ab(a-b)c}{b+ac}.$$

Für jeden Werth von c ergiebt sich hieraus eine Krümmungscurve. Unsere Gleichung giebt ihre Projectionen auf die xy-Ebene. Diese Projectionen sind also Ellipsen oder Hyperbeln, je nachdem man c negativ oder positiv nimmt.

Die Werthe von c ergeben sich, wenn man für x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Fläche nimmt; da dann aber die Gleichung für c quadratisch ist, so geben die daraus gezogenen beiden Werthe von c die beiden Krümmungslinien des betrachteten Punktes.

§ 66.

Bestimmen wir nun die Krümmungslinien derjenigen Flächen zweiten Grades, welche einen Mittelpunkt haben. Dieselben haben immer eine Gleichung von der Form:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1,$$

wo die Zeichen der Nenner bestimmen, ob die Fläche ein Ellipsoid, ein einschaliges oder ein zweischaliges Hyperboloid sei. Die Auf-

gabe ist von Dupin auf einem indirecten Wege gelöst worden, welcher nachher verfolgt werden soll. Hier geben wir jedoch die directe Auflösung. Wir erhalten:

$$P = \frac{2x}{a}, \quad Q = \frac{2y}{b}, \quad R = \frac{2z}{c}$$

und die Gleichung des § 64 wird, wenn wir die Werthe $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{dz}{dx} = z'$ einführen:

$$x(b-c)y'z' + y(c-a)z' + z(a-b)y' = 0.$$

Aus der Gleichung des Ellipsoids aber erhalten wir:

$$z' = -\frac{c(bx+ayy')}{abz}$$

und dieser Werth eingesetzt giebt:

$$ac(b-c)yxy'^2 + \{bc(b-c)x^2 + ac(c-a)y^2 - ab(a-b)z^2\}y' + yxbc(c-a) = 0.$$

Aus dieser Gleichung eliminiren wir mittelst der des Ellipsoids z^2 und erhalten:

$$ac(b-c)xyy'^2 + \{bc(b-c)x^2 + ca(c-a)y^2 - c(ab - bx^2 - ay^2)(a-b)\}y' + xybc(c-a) = 0.$$

Sei nun $x^2 = u$, $y^2 = v$, also $\frac{dv}{du} = \frac{ydy}{xdx}$, und setzen wir $\frac{dv}{du} = p$, so ergiebt sich:

$$1) \quad a(b-c)up^2 + \{b(a-c)u + a(c-b)v - ab(a-b)\}p + b(c-a)v = 0.$$

Die Gleichung ist in Bezug auf beide Variablen u und v linear, in Bezug auf den Differentialquotienten p vom zweiten Grade. Diese Art Gleichungen lassen sich, wie die des vorigen Paragraphen, ohne nach p aufzulösen, immer integriren und zwar durch Differentiiren. Indem wir dies ausführen, erhalten wir, indem wir $dv = pdu$ setzen:

$$[2a(b-c)up + b(a-c)u + a(c-b)v - ab(a-b)]dp + (a(b-c)p^2 + b(a-c)p + a(c-b)p^2 + b(c-a)p)du = 0.$$

Es verschwindet also der Factor von du, und wir haben, abgesehen von einer besonderen Auflösung, welche sich ergiebt, wenn man den Factor von dp verschwinden lässt: $dp = 0$, p ist eine willkürliche Constante, die Gleichung 1) giebt also das Integral, welches somit diese Constante enthält. Setzen wir darin wieder $u = x^2$, $v = y^2$, so haben wir:

$$2) \quad \{a(b-c)p^2 + b(a-c)p\}x^2 + \{a(c-b)p + b(c-a)\}y^2 - ab(a-b)p = 0.$$

Es ist dies die Gleichung der Projection der Krümmungslinie auf die xy-Ebene, diese Projection ist also ein Kegelschnitt und giebt mit der Flächengleichung die Krümmungslinie selbst.

Wir vereinfachen die Gleichung 2) aber, indem wir statt p zwei andere Constanten einführen; wir setzen nämlich:

3) $$\frac{ab(a-b)}{ap(b-c)+b(a-c)} = \alpha, \quad -\alpha p = \beta,$$

dann wird Gleichung 2):

4) $$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1.$$

Da aber nur eine Constante willkürlich ist, so muss zwischen α und β eine Beziehung stattfinden, welche wir erhalten, wenn wir aus den Gleichungen 3) die Grösse p eliminiren. Dies giebt:

5) $$b(a-c)\alpha - a(b-c)\beta = ab(a-b).$$

Stellen wir uns jetzt die Aufgabe, dass die Krümmungslinie durch einen gegebenen Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ der Fläche gehen soll, so erhalten wir $\frac{x_0^2}{\alpha} + \frac{y_0^2}{\beta} = 1$, also:

6) $$x_0^2\beta + y_0^2\alpha = \alpha\beta,$$

und aus dieser Gleichung und der Gleichung 5) lässt sich dann α und β bestimmen. Wir erhalten:

7) $$b(a-c)\alpha(\alpha - x_0^2) - a(b-c)\alpha y_0^2 = ab(a-b)(\alpha - x_0^2),$$

8) $$\beta = \frac{y_0^2\alpha}{\alpha - x_0^2},$$

also für α und β je zwei verschiedene Werthe, welche den beiden durch den betreffenden Punkt gehenden Krümmungslinien entsprechen.

Die Grösse α hat aber noch eine besondere Bedeutung. Bestimmen wir nämlich den Punkt $(x_0, 0, z_0)$, worin eine gegebene Krümmungslinie die xz-Ebene schneidet. Die Gleichung 7) nimmt die Form an:

$$(\alpha b(a-c) - ab(a-b))(\alpha - x_0^2) = a(b-c)y_0^2\alpha.$$

Es wird also die Bedingung $y_0 = 0$ erfüllt, wenn wir setzen $x_0^2 = \alpha$; Gleichung 5) giebt dann den zugehörigen Werth von β. $\sqrt{\alpha}$ ist also der Abscissenwerth x_0 desjenigen Punktes, worin die xz-Ebene von der betreffenden Krümmungslinie geschnitten wird; den Werth von z_0 giebt dann die Gleichung

$$\frac{x_0^2}{a} + \frac{z_0^2}{c} = 1, \quad \text{oder} \quad z_0^2 = c\left(1 - \frac{\alpha}{a}\right).$$

Nun wird aber auch y_0 verschwinden, wenn wir setzen $\alpha = \frac{a(a-b)}{a-c}$, und da in dieser Formel x_0 gar nicht vorkommt, findet dies statt

für jeden Punkt, welcher der betreffenden Krümmungslinie angehört. Wir würden also eine Krümmungslinie haben, die ganz in der xz-Ebene liegt.

Die Gleichung 4) giebt aber auch in diesem Falle $x^2 = \alpha$, und da x für jeden Punkt der betreffenden Krümmungslinie galt, so wird dieselbe lediglich sich in einen in der xz-Ebene enthaltenen Punkt zusammenziehen. Nun ist: $x^2 = \alpha = \frac{a(a-b)}{a-c}$, d. h. (§ 61) der betreffende Punkt ist ein Nabelpunkt, der zugehörige Werth von z^2 ist durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ wie in § 61 gegeben. Also:

„Die vier Nabelpunkte eines Ellipsoides sind als Krümmungslinien von unendlich kleinen Dimensionen zu betrachten."

Ueber confocale Flächen.

§ 67.

Confocale Flächen zweiten Grades nennt man bekanntlich solche, deren drei Hauptebenen gemeinschaftliche Brennpunkte haben. Sind a, b, c die Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades, welche hier ein Ellipsoid sein möge, so sind die Entfernungen der Brennpunkte dieser drei Hauptebenen vom Mittelpunkte gegeben durch die Formeln

$$\sqrt{a^2 - b^2}, \quad \sqrt{a^2 - c^2}, \quad \sqrt{b^2 - c^2}.$$

Hieraus folgt, dass man für die Mittelpunktsgleichung einer confocalen Fläche hat:

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} + \frac{z^2}{c^2 - k} - 1 = 0.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass sich durch jeden Punkt des Raumes drei und nur drei dem gegebenen Ellipsoid confocale Flächen legen lassen. Dies folgt, da x, y, z für diesen Punkt gegeben und a, b, c constant sind, daraus, dass unsere Gleichung drei Wurzeln für k hat. Es ist aber zu zeigen, dass diese drei Wurzeln immer reell sind. Bezeichnen wir die linke Seite unserer Gleichung mit F, so ist für $k = -\infty$, $F = -1$. Möge nun k wachsen, und bezeichne v eine unendlich kleine positive Grösse, sei ferner $a^2 > b^2 > c^2$, so wird F continuirlich bleiben von $k = -\infty$ bis $k = c^2 - v$, für diesen Werth aber wird $F = +\infty$. Es muss also inzwischen F wenigstens einmal durch Null gegangen sein, man hat also eine Wurzel k, welche algebraisch kleiner als c^2 ist; da hierbei alle drei Nenner $a^2 - k$, $b^2 - k$, $c^2 - k$ positiv sind, so entspricht dieser Wurzel immer ein

Ellipsoid. Setzen wir nun $k = c^2 + \nu$, so springt F auf $-\infty$ hinüber und bleibt mit wachsendem k continuirlich bis $k = b^2 - \nu$, wo $F = +\infty$ wird; es muss also eine zweite Wurzel k zwischen c^2 und b^2 geben. Da für diese $a^2 - k$ und $b^2 - k$ positiv, $c^2 - k$ aber negativ ist, so entspricht ihr ein einschaliges Hyperboloid. Für $k = b^2 + \nu$ wird F wieder $= -\infty$ und bleibt continuirlich bis $k = a^2 - \nu$, wo $F = +\infty$ wird, es giebt also eine dritte Wurzel k zwischen a^2 und b^2, dieser entspricht ein zweischaliges Hyperboloid, da $a^2 - k$ positiv und die beiden andern Nenner negativ sind. Da nun mehr als drei Wurzeln nicht vorkommen können, so lassen sich durch jeden Punkt im Raume stets drei und nicht mehr Flächen legen, die einem gegebenen Ellipsoid confocal sind, und zwar sind diese drei immer ein Ellipsoid und je eins von den beiden Arten der Hyperboloide.

Die cubische Gleichung, aus der sich k ergiebt, ist nach Wegschaffung der Nenner:

$$x^2(b^2 - k)(c^2 - k) + y^2(a^2 - k)(c^2 - k) + z^2(a^2 - k)(b^2 - k)$$
$$= (a^2 - k)(b^2 - k)(c^2 - k).$$

Sind umgekehrt die drei Werthe von k gegeben, so kann man x^2, y^2, z^2 finden. Die einfachste Form für diese Grössen giebt folgende Betrachtung. Sei $a^2 - k = \lambda$, also

$$b^2 - k = b^2 - a^2 + \lambda, \quad c^2 - k = c^2 - a^2 + \lambda,$$

so wird unsere Gleichung:

$$x^2(b^2 - a^2 + \lambda)(c^2 - a^2 + \lambda) + y^2\lambda(c^2 - a^2 + \lambda) + z^2\lambda(b^2 - a^2 + \lambda)$$
$$= \lambda(b^2 - a^2 + \lambda)(c^2 - a^2 + \lambda).$$

Das Glied dieser cubischen Gleichung, welches kein λ enthält, ist bekanntlich gleich $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, oder gleich $(a^2 - k_1)(a^2 - k_2)(a^2 - k_3)$, woraus sich ergiebt:

$$x^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2) = (a^2 - k_1)(a^2 - k_2)(a^2 - k_3),$$

und ebenso:

$$y^2(a^2 - b^2)(c^2 - b^2) = (b^2 - k_1)(b^2 - k_2)(b^2 - k_3),$$
$$z^2(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) = (c^2 - k_1)(c^2 - k_2)(c^2 - k_3).$$

Da also Punkt M durch k_1, k_2, k_3 bestimmt ist, so ist es gestattet, diese drei letzteren Grössen selbst als eine eigene Art von Coordinaten zu betrachten, welche einen Punkt als Durchschnitt dreier confocalen Flächen zweiten Grades ergeben.

Man nennt diese Coordinaten elliptische. Diese Betrachtung bildet eine Erweiterung von einer Theorie, die Euler bei Gelegenheit

des Problems der drei Körper zunächst auf die Ebene anwandte, indem er jeden Punkt der Ebene als Durchschnitt zweier confocalen Kegelschnitte, einer Ellipse und einer Hyperbel, betrachtete. Die Erweiterung auf den Raum rührt von Legendre her. Gehört der Punkt M selbst einer Fläche zweiter Ordnung an, so vereinfachen sich diese Betrachtungen. Ist diese Fläche namentlich ein Ellipsoid, und dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

so kann man A, B, C mit a, b, c identificiren, dann wird also $k_1 = 0$, das gegebene Ellipsoid ist dann für jeden seiner Punkte eine der confocalen Flächen, und wird in solchem Punkte von zwei andern, ihm confocalen Flächen geschnitten, einem einschaligen und einem zweischaligen Hyperboloid. Liegt aber Punkt M auf einem einschaligen Hyperboloid, so ist dessen Gleichung von der Gestalt:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1.$$

Man setzt dann

$$a^2 = A^2 + h, \quad b^2 = B^2 + h, \quad c^2 = -C^2 + h,$$

wo $h > C^2$, wo dann a, b, c wieder ein Ellipsoid geben, das dem Hyperboloid confocal ist. Das letztere ist dann eine der confocalen Flächen für jeden seiner Punkte und wird in ihm von einem Ellipsoid und einem zweischaligen Hyperboloid geschnitten. Liege Punkt M endlich auf einem zweischaligen Hyperboloid, und sei dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

so ist zu setzen

$$a^2 = A^2 + h, \quad b^2 = -B^2 + h, \quad c^2 = -C^2 + h,$$

wo h grösser als B^2 und als C^2 zu nehmen ist, also wieder einem Ellipsoid entspricht, das dem gegebenen Hyperboloid confocal ist.

Dass die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} + \frac{z^2}{c^2 - k} = 1$$

drei reelle Wurzeln hat, lässt sich auch folgendermassen beweisen. Da jede cubische Gleichung jedenfalls eine reelle Wurzel hat, möge k_3 dieselbe sein. Denken wir uns jetzt k durch k_1 und k_2 ersetzt und bilden die Differenz der entstehenden Gleichungen. Es ergiebt sich:

$$(k_2 - k_1)\left\{\frac{x^2}{(a^2 - k_1)(a^2 - k_2)} + \frac{y^2}{(b^2 - k_1)(b^2 - k_2)} + \frac{z^2}{(c^2 - k_1)(c^2 - k_2)}\right\} = 0,$$

wäre nun k_1 imaginär, also gleich $l + l_1 i$, so müsste $k_2 = l - l_1 i$ sein, und unsere Gleichung wäre:

$$2 l_1 i \left\{ \frac{x^2}{(a^2 - l)^2 + l_1^2} + \frac{y^2}{(b^2 - l)^2 + l_1^2} + \frac{z^2}{(c^2 - l)^2 + l_1^2} \right\} = 0.$$

Der zweite Factor ist wesentlich positiv, kann also nicht verschwinden, es wäre also $l_1 = 0$, so dass der imaginäre Theil verschwindet. Es lassen sich aus diesen Betrachtungen auch die Grenzen der drei Werthe von k ermitteln. In den vier Gleichungen:

$$\frac{x^2}{(a^2 - k_1)(a^2 - k_2)} + \frac{y^2}{(b^2 - k_1)(b^2 - k_2)} + \frac{z^2}{(c^2 - k_1)(c^2 - k_2)} = 0,$$

$$\frac{x^2}{(a^2 - k_1)(a^2 - k_3)} + \frac{y^2}{(b^2 - k_1)(b^2 - k_3)} + \frac{z^2}{(c^2 - k_1)(c^2 - k_3)} = 0,$$

$$\frac{x^2}{(a^2 - k_2)(a^2 - k_3)} + \frac{y^2}{(b^2 - k_2)(b^2 - k_3)} + \frac{z^2}{(c^2 - k_2)(c^2 - k_3)} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} + \frac{z^2}{c^2 - k} - 1 = 0$$

mögen wieder $a > b > c$ und $k_1 > k_2 > k_3$ sein.

Wegen der letzten Gleichung kann keiner der Werthe von k grösser als a^2 sein, da sonst die ganze linke Seite negativ würde, also $k_1 < a^2$.

Die drei andern Gleichungen lehren, dass nicht zwei der Grössen k kleiner als c^2 sein können, da sonst die linken Seiten positiv, also nicht gleich Null wären, also $k_2 > c^2$. Wäre nun auch k_3 grösser als c^2, so würden in der ersten und dritten Gleichung das erste und letzte Glied positiv, es muss also das zweite negativ sein, damit die linke Seite Null wird, was in der ersten Gleichung nur möglich ist, wenn $k_1 > b^2$, $k_2 < b^2$, und in der dritten, wenn $k_2 > b^2$, $k_3 < b^2$; da dies nicht möglich ist, so hat man $k_3 < c^2$.

In der ersten Gleichung ist dann das erste und letzte Glied positiv; damit das zweite negativ sei ist noch nöthig, dass $k_2 < b^2$, $k_1 > b^2$ sei, womit die Grenzen wie im vorigen Paragraphen festgestellt sind.

Anmerkung. Noch ist zu erwähnen, dass die in diesem und dem vorigen Paragraphen gegebenen Methoden, die Reellität der Wurzeln zu erweisen, auf Gleichungen von der gegebenen Gestalt selbst dann Anwendung finden, wenn sie mehr als drei Grössen x, y, z enthalten. Diese Ausdehnung der elliptischen Coordinaten findet nämlich bei manchen Untersuchungen Anwendung.

Die Gleichung

$$\text{A)} \quad \frac{x^2}{(a^2 - k_1)(a^2 - k_2)} + \frac{y^2}{(b^2 - k_1)(b^2 - k_2)} + \frac{z^2}{(c^2 - k_1)(c^2 - k_2)} = 0,$$

welche für je zwei confocale Flächen gilt, die sich im Punkte (xyz) schneiden, hat aber auch eine geometrische Bedeutung.

Sei

$$F = \frac{x^2}{a^2 - k_1} + \frac{y^2}{b^2 - k_1} + \frac{z^2}{c^2 - k_1} - 1,$$

$$F_1 = \frac{x^2}{a^2 - k_2} + \frac{y^2}{b^2 - k_2} + \frac{z^2}{c^2 - k_2} - 1,$$

so sind $F = 0$, $F_1 = 0$ die Gleichungen der beiden Flächen; dann nimmt die Gleichung A) offenbar die Gestalt an:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0,$$

und da $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ u. s. w. den Richtungscosinus der Normalen an die betreffenden Flächen proportional sind, so folgt folgender Satz:

Erfüllt man den Raum mit drei Schaaren confocaler Flächen zweiten Grades, so werden diese immer einander orthogonal schneiden.

§ 68.

Es wurde schon vorhin auf den Fall hingewiesen, wo nur solche Punkte betrachtet werden, die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen. Die Gleichungen einer solchen schreiben wir:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1.$$

Dann kann diese Fläche selbst als eine der confocalen betrachtet werden, die beiden andern sind dann:

$$\frac{x^2}{\alpha - k_1} + \frac{y^2}{\beta - k_1} + \frac{z^2}{\gamma - k_1} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\alpha - k_2} + \frac{y^2}{\beta - k_2} + \frac{z^2}{\gamma - k_2} = 1,$$

während $k_3 = 0$ ist. Aber nur im Falle die gegebene Fläche ein Ellipsoid ist, werden k_1 und k_2 immer positiv sein, da dann $\alpha > k_1 > \beta > k_2 > \gamma$ wird.

In jedem Falle findet man, indem man die erste Gleichung von den zwei letzten abzieht:

$$\frac{x^2}{\alpha(\alpha - k)} + \frac{y^2}{\beta(\beta - k)} + \frac{z^2}{\gamma(\gamma - k)} = 0,$$

wo k die Werthe k_1 und k_2 vorstellt, also mit Hinwegschaffung der Nenner:

$$x^2\beta\gamma(\beta - k)(\gamma - k) + y^2\alpha\gamma(\alpha - k)(\gamma - k) + z^2\alpha\beta(\alpha - k)(\beta - k) = 0,$$

oder:

$$k^2(\beta\gamma x^2 + \gamma\alpha y^2 + \alpha\beta z^2) - k\{\beta\gamma(\beta + \gamma)x^2 + \gamma\alpha(\gamma + \alpha)y^2 + \alpha\beta(\alpha + \beta)z^2\} + \beta^2\gamma^2 x^2 + \gamma^2\alpha^2 y^2 + \alpha^2\beta^2 z^2 = 0.$$

Für den Factor von k^2 kann vermöge der Gleichung der gegebenen Fläche $\alpha\beta\gamma$ geschrieben werden. Somit ergiebt sich für die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung:

$$(k_1 + k_2)\alpha\beta\gamma = \beta\gamma(\beta + \gamma)x^2 + \gamma\alpha(\alpha + \gamma)y^2 + \beta\alpha(\alpha + \beta)z^2,$$
$$k_1 k_2 \alpha\beta\gamma = \beta^2\gamma^2 x^2 + \gamma^2\alpha^2 y^2 + \alpha^2\beta^2 z^2.$$

Um x^2, y^2, z^2 zu finden, braucht man nur in den betreffenden Formeln des § 67 $k_3 = 0$ zu setzen und für a^2, b^2, c^2 bezüglich α, β, γ zu schreiben, dies giebt:

$$x^2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = \alpha(\alpha - k_1)(\alpha - k_2),$$
$$y^2(\alpha - \beta)(\gamma - \beta) = \beta(\beta - k_1)(\beta - k_2),$$
$$z^2(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) = \gamma(\gamma - k_1)(\gamma - k_2).$$

Sei endlich die betrachtete Fläche ein Ellipsoid, also α, β, γ positiv und $\alpha > \beta > \gamma$, $k_1 > k_2$, wie im allgemeinen Falle, so lassen sich x^2, y^2, z^2 bequem trigonometrisch ausdrücken. Zu dem Ende sei

$$\frac{k_1 - \beta}{\alpha - \beta} = \cos^2 u, \quad \frac{\beta - k_2}{\beta - \gamma} = \cos^2 v.$$

Die linken Seiten sind nämlich bei unserer Annahme positive Brüche.

Dann ist:

$$y^2 = \beta \cos^2 u \cos^2 v,$$

ferner, da

$$k_1 = \beta + (\alpha - \beta)\cos^2 u, \quad k_2 = \beta - (\beta - \gamma)\cos^2 v,$$

also:

$$\alpha - k_1 = (\alpha - \beta)\sin^2 u, \quad \alpha - k_2 = (\alpha - \beta) - (\beta - \gamma)\cos^2 v,$$
$$x^2 = \alpha \sin^2 u \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma} - \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma}\cos^2 v\right),$$

oder wenn $\qquad \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma} = \lambda^2, \quad \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} = \lambda_1^2$

gesetzt wird, ist:

$$x^2 = \alpha \sin^2 u(1 - \lambda_1^2 \sin^2 v),$$

da $\lambda^2 + \lambda_1^2 = 1$ ist. Auf ähnliche Weise erhält man:

$$z^2 = \gamma \sin^2 v(1 - \lambda^2 \sin^2 u).$$

§ 69.

Kehren wir jetzt zu unserer Gleichung für die Krümmungslinien der Flächen zweiter Ordnung zurück. Der Ausdruck

$$1) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \lambda\left(\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta}\right) = 1 + \lambda,$$

wo λ eine willkürliche Constante ist, bezeichnet offenbar eine Fläche zweiten Grades, welche durch unsere Krümmungslinie geht, denn diese Gleichung wird identisch, wenn man

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1, \quad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1$$

setzt. Es fragt sich, ob das willkürliche λ so bestimmt werden kann, dass unsere Gleichung eine der gegebenen confocalen Flächen giebt. Zu dem Ende muss die Gleichung 1), also:

$$x^2\left(\frac{1}{a} + \frac{\lambda}{\alpha}\right) + y^2\left(\frac{1}{b} + \frac{\lambda}{\beta}\right) + \frac{z^2}{c} = 1 + \lambda,$$

auf die Form gebracht werden können (§ 67):

$$\frac{x^2}{a-k} + \frac{y^2}{b-k} + \frac{z^2}{c-k} = 1.$$

Es muss also sein:

$$a\alpha(1+\lambda) = (\alpha + a\lambda)(a-k), \quad b\beta(1+\lambda) = (\beta + b\lambda)(b-k),$$
$$c(1+\lambda) = c - k,$$

oder: $\quad \lambda = -\frac{k}{c}, \quad a\alpha(c-k) = (\alpha c - ak)(a-k),$

$$b\beta(c-k) = (\beta c - bk)(b-k),$$

oder: $\quad a\alpha = a(a-k) + \alpha c, \quad b\beta = b(b-k) + \beta c;$

dies giebt nach Elimination von k:

$$\alpha b(a-c) - \beta a(b-c) = ab(a-b).$$

Dies aber ist die Relation, welche wir § 66 zwischen α und β gefunden haben, und somit lässt sich die Krümmungslinie in jedem Punkte immer als Durchschnitt der gegebenen Fläche und einer der confocalen Flächen, die durch diesen Punkt gehen, betrachten. Da deren nur zwei nach dem Vorigen vorhanden sind, so haben wir den Satz:

Die beiden Krümmungslinien, die durch einen Punkt einer gegebenen Fläche zweiten Grades gehen, sind die Durchschnitte mit den beiden durch diesen Punkt gehenden confocalen Flächen.

§ 70.

Dupin, von dem dieser Satz herrührt, bedient sich jedoch der umgekehrten Schlussfolge; statt die Gleichung des § 66

$$x(b-c)dydz + y(c-a)dzdx + zdxdy(a-b) = 0$$

zu integriren, beweist er aus derselben, dass sie auch für die durch den betreffenden Punkt gehenden confocalen Flächen gilt. Dies folgt nämlich einfach daraus, dass sie sich nicht ändert, wenn a, b, c gleich-

zeitig um k abnehmen. Für jeden Punkt also, den beide confocalen Flächen gemein haben, ist ihnen eine Krümmungslinie gemeinsam, mithin ist der ganze Durchschnitt eine solche für beide Flächen.

dx, dy, dz sind die kleinen Zuwüchse, welche x, y, z annehmen, wenn man auf der Curve fortgeht. Da die Curve nun auf der gegebenen Fläche liegt, so hat man für diese Incremente die Gleichung

$$\frac{xdx}{a} + \frac{ydy}{b} + \frac{zdz}{c} = 0,$$

und weil sie auch auf der zweiten liegt:

$$\frac{xdx}{a-k} + \frac{ydy}{b-k} + \frac{zdz}{c-k} = 0.$$

Hieraus kann man die Verhältnisse der dx, dy, dz zu einander bestimmen. Wir thun es, indem wir den unbestimmten Factor f einführen:

$$f \cdot xdx = \frac{1}{b(c-k)} - \frac{1}{c(b-k)} = \frac{cb - ck - bc + bk}{bc(b-k)(c-k)} = \frac{(b-c)k}{bc(b-k)(c-k)},$$

oder wenn wir statt f das Product:

$$\frac{f}{k}\, abc(a-k)(b-k)(c-k) = F$$

einführen: $\quad F \cdot x \cdot dx = a(b-c)(a-k),$

und ähnlich $\quad F \cdot y \cdot dy = b(c-a)(b-k)$

und $\quad F \cdot z \cdot dz = c(a-b)(c-k).$

Also wird

$$dy \cdot dz = \frac{bc}{F^2 \cdot y \cdot z}(c-a)(a-b)(b-k)(c-k)$$

und ähnlich die andern. Wir können somit die Gleichung der Krümmungscurve durch Substitution dieser Werthe und Multiplication mit F^2 so schreiben:

$$\frac{x}{yz}\, bc(a-b)(b-c)(c-a)(b-k)(c-k)$$

$$+ \frac{y}{zx}\, ca(a-b)(b-c)(c-a)(c-k)(a-k)$$

$$+ \frac{z}{xy}\, ab(a-b)(b-c)(c-a)(a-k)(b-k) = 0,$$

oder:

$$\frac{x^2}{a(a-k)} + \frac{y^2}{b(b-k)} + \frac{z^2}{c(c-k)} = 0.$$

Diese Gleichung ergiebt sich auch, wenn man Gleichung

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \quad \text{von} \quad \frac{x^2}{a-k} + \frac{y^2}{b-k} + \frac{z^2}{c-k} = 1$$

subtrahirt, bestimmt also in Verbindung mit einer dieser Gleichungen die Krümmungscurve.

§ 71.

Dupin kommt aber durch diese Betrachtungen auf einen allgemeinen Satz, von dem dies nur ein specieller Fall ist. Ehe wir auf diesen Satz kommen, beweisen wir folgenden Hülfssatz:

Wenn drei Flächen $F = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ in ihren Durchschnittspunkten normal aufeinander stehen, so sind in dem Punkte, in welchem alle drei Flächen sich schneiden, die Tangenten der Durchschnittscurven zu gleicher Zeit die Tangenten der Krümmungscurven oder Haupttangenten.

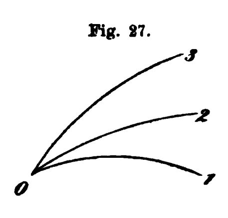


Fig. 27.

Die beiden Flächen F und F_1 mögen sich in der Curve 1 (Fig. 27), die beiden F_1 und F_2 in der Curve 2, und F_2 und F in der Curve 3 schneiden. Behalten wir die in § 56 angegebenen Bezeichnungen für die partiellen Differentialquotienten von F bei, und bezeichnen die entsprechenden Ableitungen der Functionen F_1 und F_2 durch die entsprechenden Buchstaben mit dem Index 1 resp. 2, so haben wir folgende drei Gleichungen:

1) damit $F \perp F_1$: $P \cdot P_1 + Q \cdot Q_1 + R \cdot R_1 = 0,$

2) damit $F_1 \perp F_2$: $P_1 \cdot P_2 + Q_1 \cdot Q_2 + R_1 \cdot R_2 = 0,$

3) damit $F_2 \perp F$: $P_2 \cdot P + Q_2 \cdot Q + R_2 \cdot R = 0.$

Die Gleichung 1) findet nun nicht bloss in einem bestimmten Punkte, sondern entlang der ganzen Curve 1 statt. Wir dürfen sie daher differentiiren und erhalten dadurch folgende Gleichung

4) $P \cdot dP_1 + Q \cdot dQ_1 + R \cdot dR_1 + P_1 \cdot dP + Q_1 \cdot dQ + R_1 \cdot dR = 0,$

in welcher Gleichung

$$dP = Ldx + N'dy + M'dz, \quad dQ = N'dx + Mdy + L'dz,$$
$$dR = M'dx + L'dy + Ndz$$

ist und ähnliche Werthe für dP_1, dQ_1, dR_1 gelten.

Betrachten wir nun die den Flächen F und F_1 in Punkt O gemeinschaftliche Tangente, so sind deren Gleichungen, wenn ds das Bogenelement der Durchschnittscurve ist,

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{ds}};$$

diese Tangente aber ist vermöge der Voraussetzung Normale der Fläche F_2, deren Gleichungen:

$$\frac{\xi - x}{P_2} = \frac{\eta - y}{Q_2} = \frac{\zeta - z}{R_2}$$

lauten. Setzt man also

$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2 + R_2^2},$$

so erhält man:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{P_2}{S_2}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{Q_2}{S_2}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{R_2}{S_2}.$$

Die drei ersten Glieder der Gleichung 4) lassen sich nun folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} P \cdot dP_1 + Q \cdot dQ_1 + R \cdot dR_1 &= P\{L_1 \cdot dx + N_1' \cdot dy + M_1' \cdot dz\} \\ &+ Q\{N_1'dx + M_1 dy + L_1'dz\} + R\{M_1'dx + L_1'dy + N_1 dz\} \\ &= \frac{ds}{S_2}\{P_2\{PL_1 + QN_1' + RM_1'\} + Q_2\{PN_1' + QM_1 + RL_1'\} \\ &\qquad + R_2\{PM_1' + QL_1' + RN_1\}\} \\ &= \frac{ds}{S_2}\{L_1 PP_2 + M_1 QQ_2 + N_1 RR_2 + L_1'(Q_2 R + R_2 Q) \\ &\qquad + M_1'(R_2 P + P_2 R) + N_1'(P_2 Q + Q_2 P)\}. \end{aligned}$$

Setzen wir daher

$$L_1 PP_2 + M_1 QQ_2 + \cdots + N_1'(P_2 Q + Q_2 P) = U_1$$

und analog

$$LP_1 P_2 + MQ_1 Q_2 + \cdots + N'(P_2 Q_1 + Q_2 P_1) = U$$

und

$$L_2 PP_1 + M_2 QQ_1 + \cdots + N_2'(P_1 Q + Q_1 P) = U_2,$$

so wird zunächst, wenn man auch die drei letzten Glieder der Gleichung 4) in derselben Weise berechnet, diese Gleichung die Gestalt haben: $\frac{ds}{S_2} U_1 + \frac{ds}{S_2} U = 0$. Aehnliche Gleichungen erhält man durch Vertauschen der Flächen F, F_1, F_2 miteinander, wobei nur zu merken ist, dass die Differentialgleichungen zwar noch in der ganzen Ausdehnung der entsprechenden Durchschnittcurve gelten, die resultirenden Gleichungen in U, U_1, U_2 aber nur für den Punkt O, weil nur für diesen Punkt die zu ihrer Ableitung nothwendige Beziehung besteht, dass die Tangente an die Durchschnittscurve zweier der gegebenen Flächen Normale zu der dritten Fläche ist. Lassen wir daher in den resultirenden Gleichungen die gemeinschaftlichen Factoren weg, so erhalten wir für den Punkt O folgende Gleichungen:

$$U_1 + U = 0, \quad U_2 + U_1 = 0, \quad U + U_2 = 0,$$

und folglich:

$$U = 0, \quad U_1 = 0, \quad U_2 = 0.$$

Man hat nun die Gleichung $U = 0$ oder $U \cdot \frac{ds}{S_2}$ oder

$$P_1 \cdot dP + Q_1 \cdot dQ + R_1 \cdot dR = 0,$$

ferner die Gleichung 1), nämlich:

$$P_1 \cdot P + Q_1 \cdot Q + R_1 \cdot R = 0$$

und diejenige, welche angiebt, dass im Punkte O die Tangente an die Curve 1 normal steht auf der Normale der Fläche $F_1 = 0$, nämlich:

$$P_1 \cdot dx + Q_1 \cdot dy + R_1 \cdot dz = 0.$$

Diese drei Gleichungen ergeben, wenn man die Factoren P_1, Q_1, R_1 eliminirt:

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ dP & dQ & dR \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

für Punkt O. Diese Gleichung ist gleichzeitig die für die Krümmungscurve der Fläche $F = 0$, s. § 64, wenn man dieselbe in Determinantenform schreibt, d. h. sie giebt die Richtung der Haupttangenten im Punkte O an. Man findet also: im Punkte O ist die Tangente der Curve 1 zugleich Haupttangente der Fläche $F = 0$. Aehnliches gilt auch für die andern Durchschnittscurven.

§ 72.

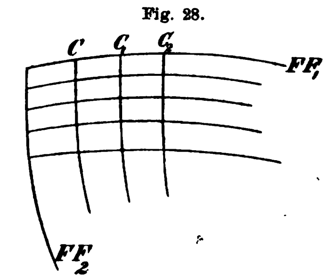
Wir kommen jetzt auf den bereits angeführten Dupin'schen Satz. Derselbe lautet:

„Wenn drei Schaaren von Flächen in allen Schnittpunkten aufeinander senkrecht stehen, so schneiden sie sich in Krümmungslinien.“

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des eben gegebenen Hilfssatzes.

Denn bezeichnen wir diese drei Schaaren von Orthogonalflächen bezüglich mit F, F_1, F_2 und greifen aus der Schaar F eine heraus und betrachten auf derselben eine Krümmungslinie CC_1C_2 (Fig. 28), durch welche in allen Punkten wir je eine der beiden andern Schaaren F_1 und F_2 gelegt denken. Da diese beiden Flächen, die F in Punkt C schneiden, mit F eine Haupttangente gemein haben, also eine davon, etwa die in die Schaar F_1 gehörige, mit der Krümmungslinie CC_1C_2 ein Element CC_1 gemein hat, und dies auch für die Punkte C_1, C_2 ... stattfindet, so bilden diese Punkte C, C_1, C_2 auch eine Krümmungslinie für die durch C gehende Fläche F_1, und ähnliches gilt auch für die Fläche F_2.

Fig. 28.



Neue Form der Flächengleichung.

§ 73.

Für das Folgende ist es nöthig, noch von einer andern Form der Flächengleichungen auszugehen. Es ist die, wo die drei Coordinaten jede durch zwei Variable u und v bestimmt sind, durch deren Elimination sich die Gleichung zwischen x, y, z: $F(x, y, z) = 0$ ergiebt. Führt man die Formeln, die wir bisher für diese letztere Bestimmung der Flächen gegeben haben, auf das eben angeführte System von drei Gleichungen zurück, so bekommen wir zwar weitläufigere, aber auch viel symmetrischere Formeln. Wir recapituliren zunächst kurz, was über diese Art der Darstellung einer Fläche in den §§ 22—24 gesagt ist.

Betrachtet man in den drei Gleichungen, welche die drei Coordinaten x, y, z als Functionen von u und v geben, zunächst u als constant, dagegen v als veränderlich, so erhält man eine Curve, welche auf der Fläche liegt. Zu jedem Werthe von u wird eine solche Curve gehören, in deren Gleichungen v die unabhängige Veränderliche ist, und jede solche Curve wollen wir nennen eine Curve V. Ebenso wollen wir eine Curve, welche sich durch die Annahme: v constant, also u variabel, ergiebt, nennen eine Curve U. Sämmtliche Curven V ordnen sich in ein System, und sämmtliche Curven U in ein zweites, so dass also die ganze Fläche mit zwei Systemen von Curven überzogen gedacht wird. Jeder Punkt der Fläche wird alsdann gegeben als Durchschnitt einer gewissen Curve V mit einer gewissen Curve U; und jede andere, nicht zu diesen beiden Systemen gehörige Curve auf der Fläche wird gegeben durch eine Gleichung zwischen den Veränderlichen u und v.

Betreffs der schon früher erwähnten Beispiele der Kugel und des dreiaxigen Ellipsoids wollen wir noch anführen, dass unter den unzähligen Arten, diese Flächen durch zwei neue Grössen u und v darzustellen, für dieselben ausser den oben erwähnten Gleichungen noch folgende von häufiger Anwendung sind: für die Kugel

$$x = a \cdot \sin u \cdot \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 v}, \quad y = a \cdot \cos u \cdot \cos v,$$
$$z = a \cdot \sin v \cdot \sqrt{1 - (1 - k^2) \cdot \sin^2 u},$$

wo k eine beliebige Constante bedeutet; für das dreiaxige Ellipsoid:

$$x = a \cdot \sin u \cdot \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 v}, \quad y = b \cdot \cos u \cdot \cos v,$$
$$z = c \cdot \sin v \cdot \sqrt{1 - (1 - k^2) \cdot \sin^2 u}.$$

Es ist dies dieselbe Gleichung, welche § 68 bei Einführung der elliptischen Coordinaten gefunden wurde.

Auch für die Schraubenfläche wollen wir eine solche Darstellungsart erwähnen. Man denke sich diese Fläche so entstanden, dass eine gerade Linie auf einer andern stets normal bleibend sich an dieser so heraufbewegt, dass die Höhe, um welche sie steigt, proportional ist dem Winkel, um welchen sie sich dreht. Nennen wir diesen Winkel u und bezeichnen die zugehörige Höhe durch $\alpha \cdot u$, wo α eine Constante ist, so ist zunächst die Coordinate $z = \alpha \cdot u$. Da ferner ein Punkt, welcher ursprünglich von der Axe die Entfernung v hat, stets diese Entfernung beibehält, so sind die drei Gleichungen der Schraubenfläche hiernach

$$z = \alpha \, . \, u, \quad x = v \cdot \cos u, \quad y = v \cdot \sin u,$$

aus welchen man durch Elimination von v und u wiederum die gewöhnliche Form herleiten kann: $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{\alpha}$, oder, um z als explicite Function von y und x darzustellen: $z = \alpha \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$.

Wir gehen nun über zur allgemeinen Betrachtung der Flächen für diese Form ihrer Gleichung. Wir wollen dabei für alle folgenden Entwickelungen nachstehende Abkürzungen einführen:

$$\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = A,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = B,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = C,$$

$$A \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = D,$$

$$A \frac{\partial^2 x}{\partial u \cdot \partial v} + B \frac{\partial^2 y}{\partial u \cdot \partial v} + C \frac{\partial^2 z}{\partial u \cdot \partial v} = D',$$

$$A \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + B \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + C \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = D'',$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = F,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G.$$

Zwischen diesen Ausdrücken findet noch die Relation statt:

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2.$$

§ 74.

Aus § 8 folgt, dass für jede Curve U die Gleichungen ihrer Tangente im Punkte x, y, z folgende sind:

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial x}{\partial u}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial z}{\partial u}},$$

und die Cosinus α, β, γ der drei Winkel, welche diese Tangente mit den drei Axen bildet:

$$\alpha = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{E}}, \quad \beta = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\sqrt{E}}, \quad \gamma = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{E}}.$$

Nennen wir ebenso die Cosinus der drei Winkel, welche eine Curve V im Punkte x, y, z mit den drei Axen bildet, resp. α', β', γ', so haben wir:

$$\alpha' = \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{G}}, \quad \beta' = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{G}}, \quad \gamma' = \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{G}}.$$

Daraus ergiebt sich, dass der Winkel w, unter dem sich diese Curven U und V schneiden, folgender Gleichung genügt:

$$\cos w = \frac{F}{\sqrt{E \cdot G}}.$$

Demnach ist überall, wo diese beiden Curven einander rechtwinklig schneiden, $F = 0$. Also: die Bedingung, dass die Curven U und V sich rechtwinklig durchkreuzen, ist $F = 0$.

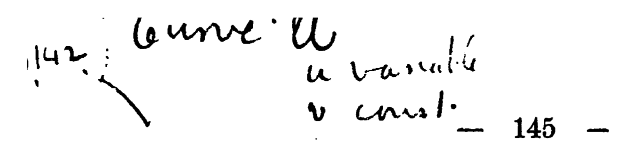
Drückt man z. B. die Gleichung der Kugel auf die im § 22 angegebene Weise aus, also

$$z = a \sin v, \quad x = a \cos v \cos u, \quad y = a \cos v \sin u,$$

d. h. durch die Länge v und die Breite u, so müssen, weil die dieser Art der Darstellung entsprechenden Systeme von Meridianen und Parallelkreisen aufeinander normal stehen, diese drei Gleichungen die Gleichung $F = 0$ befriedigen, was auch der Fall ist. Ebenso sieht man, dass die im vorigen Paragraphen für die Kugel angegebenen Gleichungen dieser Bedingung genügen.

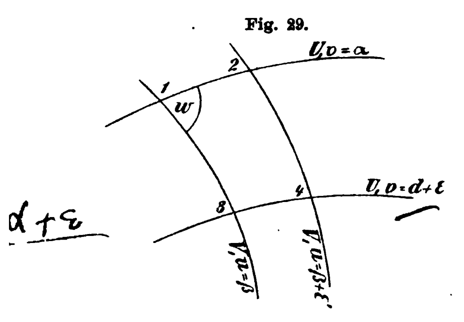
§ 75.

Das Oberflächenelement, wie es durch diese Darstellung der Fläche bedingt wird, Fig. 29, findet man folgendermassen: Man denke sich zwei einander unendlich nahe Curven des Systems U, für welche



also v constant ist und zwar resp. die beiden Werthe $v = \alpha$ und $v = \alpha + \varepsilon$ hat, so dass ε eine unendlich kleine Grösse bedeutet. Man denke sich ebenso zwei unendlich nahe Curven des Systems V, für welche u resp. die beiden constanten Werthe $u = \beta$ und $u = \beta + \varepsilon'$ hat. Man bezeichne den Punkt ($v = \alpha$, $u = \beta$) mit (1), ($v = \alpha$, $u = \beta + \varepsilon'$) mit (2), ($v = \alpha + \varepsilon$, $u = \beta$) mit (3), ($v = \alpha + \varepsilon$, $u = \beta + \varepsilon'$) mit (4). Da nun die Curven einander unendlich nahe sind, so kann man das Flächenelement (1, 2, 3, 4) für diese Untersuchung als ebenes Parallelogramm ansehen*). Demnach ist sein Inhalt gleich dem Product zweier Seiten multiplicirt mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels, also gleich $(1, 2) \cdot (1, 3) \cdot \sin w$. Es ist nun

Fig. 29.



$$\cos w = \frac{F}{\sqrt{E \cdot G}}, \text{ also } \sin w = \frac{\sqrt{E \cdot G - F^2}}{\sqrt{E \cdot G}}, \text{ d. i. } = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\sqrt{E \cdot G}}.$$

Ferner ist, wenn (1) die Coordinaten x, y, z, also (2) die Coordinaten

$$x + \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad y + \frac{\partial y}{\partial u} du, \quad z + \frac{\partial z}{\partial u} du$$

hat, $(1, 2) = \sqrt{E} \cdot du$, und ebenso findet man $(1, 3) = \sqrt{G} \cdot dv$. Multiplicirt man daher diese drei Ausdrücke für $\sin w$, (1, 2) und (1, 3), so erhält man das Oberflächenelement:

$$du \cdot dv \cdot \sqrt{EG - F^2} = du \cdot dv \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Will man daher die ganze Oberfläche oder einen bestimmten Theil derselben finden, so hat man diesen Ausdruck zweimal zu integriren, und zwar innerhalb gewisser Grenzen, welche sich aus der Grösse des gesuchten Stückes in jedem einzelnen Falle bestimmen.

Ueberträgt man diese Formel in die gewöhnliche Art der Darstellung, welche man so schreiben kann: $z = f(u, v)$, $x = u$, $y = v$, so verwandelt sich der Ausdruck für das Element in den bekannten

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \cdot dx \cdot dy \text{ oder } \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \cdot dx \cdot dy.$$

*) Es zerfällt nämlich in die beiden Dreiecke (1, 2, 3) und (2, 3, 4), die sich nur um eine gegen ihren Inhalt verschwindende Grösse unterscheiden.

§ 76.

Um die Tangente an eine auf der Fläche liegende (Fig. 30) aber nicht zu einem der beiden Systeme U oder V gehörige Curve $u = f(v)$ zu finden, berechnen wir zuerst ihr Bogenelement, d. h. die Grösse $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Aus den Gleichungen für x, y, z erhalten wir:

Fig. 30.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} . dv.$$

Es wird also

$$ds^2 = E \cdot du^2 + G \cdot dv^2 + 2F \cdot du \cdot dv$$

und folglich, wenn man für du seinen Werth $du = f'(v)dv$ oder $du = u'dv$ einträgt, $ds = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu' + G} \cdot dv$. Die Länge der Curve innerhalb bestimmter Grenzen für v findet man demnach, wenn man diese Gleichung nach v innerhalb dieser Grenzen integrirt. Man kann nun sehr leicht die Winkel ableiten, welche die Tangente an diese Curve mit den drei Axen bildet. Nennt man ihre Cosinus a, b, c, so ist

$$a = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{du}{dv} + \frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{ds}{dv}}, \quad b = \frac{\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dv} + \frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{ds}{dv}}, \quad c = \frac{\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dv} + \frac{\partial z}{\partial v}}{\frac{ds}{dv}}.$$

Hieraus ergiebt sich mittels der Formeln des § 74 der Winkel, welchen diese Curve, die wir durch C bezeichnen wollen, mit den Curven U, und der, welchen sie mit den Curven V bildet; man findet:

$$\cos(C, U) = \frac{E \cdot \frac{du}{dv} + F}{\sqrt{E} \cdot \frac{ds}{dv}} \quad \text{und} \quad \cos(C, V) = \frac{F \cdot \frac{du}{dv} + G}{\sqrt{G} \cdot \frac{ds}{dv}}.$$

Schneiden die Curven U und V einander rechtwinklig, so ist $F = 0$, und die beiden Winkel (C, U) und (C, V) ergänzen sich zu einem Rechten, so dass man $\sin CV$ statt $\cos CU$ schreiben kann, und demgemäss die Formel erhält: $\operatorname{tg}(C, V) = \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot \frac{du}{dv}$. Diese Formel ist eigentlich von selbst einleuchtend. Stellen wir uns wiederum zwei unendlich nahe Curven U und zwei unendlich nahe Curven V vor, so ist das Bogenelement der Curve U: $d\sigma = \sqrt{E} \cdot du$,

das der Curve $V: d\sigma' = \sqrt{G} \cdot dv$ und $\operatorname{tg}(C, V) = \frac{d\sigma}{d\sigma'} = \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot \frac{du}{dv}$. Die Gleichungen der Normale im Punkte (x, y, z) an die Fläche seien jetzt

$$\frac{\xi - x}{l} = \frac{\eta - y}{m} = \frac{\zeta - z}{n};$$

lmn sind dann den Cosinus der Winkel proportional, welchen dieselbe mit den Axen macht, und da die Normale sowohl auf der Curve U als auf der Curve V im Punkte (x, y, z) senkrecht steht, so hat man:

$$l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial y}{\partial u} + n\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad l\frac{\partial x}{\partial v} + m\frac{\partial y}{\partial v} + n\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen aber erhält man: $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$, also sind die Gleichungen der Normale:

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C};$$

ebenso die Gleichungen der Tangentialebene

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0,$$

und die Cosinus der Winkel der Normale mit den Axen:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

wo nach § 73 auch für $A^2 + B^2 + C^2$ gesetzt werden kann: $EG - F^2$.

§ 77.

Als Beispiel einer Curve, welche auf der Kugel liegt und durch die Grössen u und v bestimmt ist, betrachten wir die Loxodrome. Man nennt Loxodrome diejenige Curve auf der Kugel, welche sämmtliche Meridiane unter demselben Winkel schneidet. Hieraus folgt schon, dass jeder Parallelkreis eine Loxodrome ist, denn er schneidet alle Meridiane rechtwinklig. Wählen wir zum Radius der Kugel die Einheit, so sind ihre Gleichungen, durch die geographische Länge u und die geographische Breite v ausgedrückt:

$$x = \cos v \cdot \cos u, \quad y = \cos v \cdot \sin u, \quad z = \sin v.$$

Um nun den Winkel zu finden, den irgend eine Curve C auf der Kugel mit dem Meridian (welcher eine Curve V ist) bildet, berechnen wir die partiellen Differentialquotienten von x, y, z nach u und v, und erhalten dafür:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\sin v \cdot \cos u, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\sin v \cdot \sin u, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \cos v,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\cos v \cdot \sin u, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \cos v \cdot \cos u, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0;$$

also ist $E = \cos^2 v$, $F = 0$, $G = 1$, folglich wird $\operatorname{tg}(C, V) = \cos v \cdot \frac{du}{dv}$. Soll nun die Curve C Loxodrome sein, so muss der Winkel (C, V) constant, $= \alpha$ sein, also haben wir die Differentialgleichung

$$\frac{du}{dv} \cdot \cos v = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{dv}{\cos v} = du.$$

Diese Gleichung lässt sich unmittelbar integriren; sie giebt:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot l \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right) + c = u,$$

und dies ist die Gleichung der Loxodrome.

Sie enthält zwei Constante, welche hinreichen, um zwei Punkte auf der Kugel zu bestimmen, durch welche die Loxodrome gelegt werden soll, und umgekehrt reichen zwei Punkte auf der Kugel hin, um zwischen ihnen eine bestimmte Loxodrome zu legen. Soll z. B. der Ausgangspunkt der Loxodrome auf dem Null-Meridian und zwar in der geographischen Breite β liegen, so müssen der gefundenen Gleichung gleichzeitig die Werthe $u = 0$, $v = \beta$ genügen:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot l \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) + c = 0,$$

man kann somit die Constante mittelst β eliminiren, und die Gleichung der Loxodrome wird dann:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot l \frac{\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right)}{\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)} = u,$$

aus welcher man noch den Winkel α eliminiren oder auch finden kann, sobald der Endpunkt der Loxodrome gegeben ist.

Als Schluss zu diesen einleitenden Formeln bemerken wir noch:

W e n n z w e i C u r v e n a u f e i n e r F l ä c h e s i c h i n e i n e m P u n k t e b e r ü h r e n, d. h. dort eine gemeinschaftliche Tangente haben, so haben für diesen Punkt nicht blos die Grössen u und v in beiden Curven denselben Werth, sondern auch der Differentialquotient $\frac{du}{dv}$. Denn es sind, wie unsere Formeln ergeben, $\cos(C, U)$ und $\cos(C, V)$, sowie E, F, G beiden Curven gemeinsam; dasselbe findet also auch mit $\frac{du}{dv}$ statt.

§ 78.

Die elliptischen Coordinaten geben einen besonderen Fall dieser allgemeinen Betrachtungen. Mit ihrer Hilfe soll die Oberfläche des Ellipsoids betrachtet werden. Wenden wir die Formeln des § 73 an:

$$x = a \sin u \Delta', \quad y = b \cos u \cos v, \quad z = c \sin v \Delta,$$

$$\Delta = \sqrt{1 - \lambda_1^2 \sin^2 v}, \quad \Delta' = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}, \quad \lambda^2 + \lambda_1^2 = 1,$$

wo für k geschrieben ist λ_1,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a \cos u \Delta', \quad \frac{\partial y}{\partial u} = - b \sin u \cos v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = - \frac{\lambda^2 c \sin v \sin u \cos u}{\Delta},$$

also $E = P + Q \cos^2 v$, wo

$$P = a^2 \cos^2 u - a^2 \cos^2 u \lambda_1^2 + \frac{c^2 \lambda^4 \sin^2 u \cos^2 u}{1 - \lambda^2 \sin^2 u}$$

$$= \lambda^2 \cos^2 u \left(a^2 + \frac{c^2 \lambda^2 \sin^2 u}{1 - \lambda^2 \sin^2 u}\right) = \frac{\cos^2 u \lambda^2}{\Delta^2} (a^2 \Delta^2 + c^2 \lambda^2 \sin^2 u)$$

$$= \frac{\cos^2 u \lambda^2}{\Delta^2} (a^2 - (a^2 - c^2) \lambda^2 \sin^2 u) = \frac{\cos^2 u \lambda^2}{\Delta^2} (a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u),$$

und $$Q = a^2 \lambda_1^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u - \frac{c^2 \lambda^4 \sin^2 u \cos^2 u}{1 - \lambda^2 \sin^2 u},$$

oder weil $\lambda^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$, also $- c^2 \lambda^2 = a^2 \lambda_1^2 - b^2$,

$$Q = a^2 \lambda_1^2 \cos^2 u \left\{1 + \frac{\lambda^2 \sin^2 u}{1 - \lambda^2 \sin^2 u}\right\} + b^2 \sin^2 u \left\{1 - \frac{\lambda^2 \cos^2 u}{1 - \lambda^2 \sin^2 u}\right\}$$

$$= \frac{\lambda_1^2}{\Delta^2} \{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin u\}.$$

Also wird $$E = \frac{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}{\Delta^2} \{\lambda^2 \cos^2 u + \lambda_1^2 \cos^2 v\};$$

auf ähnliche Weise erhält man:

$$G = \frac{c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}{\Delta'^2} \{\lambda^2 \cos^2 u + \lambda_1^2 \cos^2 v\},$$

und da $F = 0$ ist wird das Oberflächenelement

$$du \,.\, dv \,.\, \sqrt{EG - F^2} = du \cdot dv \cdot \frac{\lambda^2 \cos^2 u + \lambda_1^2 \cos^2 v}{\Delta \cdot \Delta'}$$

$$\cdot \sqrt{(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)(c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v)}.$$

Integrirt man diesen Ausdruck innerhalb 0 und $\frac{\pi}{2}$ nach beiden Variabeln u und v, so erhält man den Octanten des Ellipsoids; man findet somit das ganze Ellipsoid gleich achtmal folgendem Ausdruck:

$$\lambda^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 u \sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}}{\Delta} du \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}}{\Delta'} dv$$

$$+ \lambda_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}}{\Delta} du \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 v \sqrt{c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}}{\Delta'} dv.$$

§ 79.

Wir stellen uns nun auch in Beziehung auf diese Darstellung der Flächen die Aufgabe: Die Richtungen der Hauptschnitte und die Krümmungen derselben zu bestimmen. Diese Untersuchung führt auf einen der schönsten Sätze aus der Geometrie der Flächen, welcher von Gauss gegeben ist.

Nehmen wir an, dass irgend eine Curve auf der Fläche gezogen sei, deren Gleichung sei $u = f(v)$, und bezeichnen wir $\frac{du}{dv}$ kurzweg mit u', $\frac{d^2u}{dv^2}$ mit u''. Wollen wir nun die Gleichung der Curve in derjenigen Art der Darstellung haben, wo die drei Coordinaten x, y, z gegeben sind als Functionen einer neuen unabhängigen veränderlichen Grösse v, so haben wir nur in die drei Gleichungen der Fläche, welche die Coordinaten als Functionen von u und v ausdrücken, statt u einzusetzen die Function $f(v)$. Unter dieser Voraussetzung bekommen wir:

$$\frac{dx}{dv} = \frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{d^2x}{dv^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} u'^2 + \frac{\partial x}{\partial u} u'' + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \cdot \partial v} u' + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{\partial y}{\partial u} u' + \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{d^2y}{dv^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} u'^2 + \frac{\partial y}{\partial u} u'' + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \cdot \partial v} u' + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2},$$

$$\frac{dz}{dv} = \frac{\partial z}{\partial u} u' + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{d^2z}{dv^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} u'^2 + \frac{\partial z}{\partial u} u'' + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \cdot \partial v} u' + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Nun ist der Krümmungsradius irgend einer Curve doppelter Krümmung

$$r = \frac{\left\{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left\{\left(\frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2z}{dv^2} - \frac{dz}{dv}\cdot\frac{d^2y}{dv^2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2} - \frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2z}{dv^2}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Diese Formel wurde beiläufig in § 14 gefunden. Sie folgt aber auch aus der § 12 gegebenen, worin wir v für t, x', y' u. s. w. für $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{dv} \cdots$, x'', y'' für $\frac{d^2x}{dv^2}$, $\frac{d^2y}{dv^2} \cdots$ schreiben, nämlich:

$$r = \frac{s'^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}}.$$

Es ist nämlich:

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

$$s'^2 s''^2 = (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2;$$

wenn wir dies einsetzen, erhalten wir für das Quadrat des Nenners:

$$\{(x'^2 + y'^2)z''^2 + (y'^2 + z'^2)x''^2 + (z'^2 + x'^2)y''^2 - 2x'y'x''y'' \\ - 2y'z'y''z'' - 2z'x'x''z''\} : s'^2,$$

oder:

$$\{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2\} : s'^2,$$

woraus sich unsere Formel sofort ergiebt.

In diese Formel sind die für $\frac{dx}{dv}, \frac{d^2x}{dv^2}$ u. s. w. aufgestellten Werthe zu substituiren, und dadurch erhält man den Ausdruck für den Krümmungsradius irgend einer Curve, die auf der Fläche gezogen ist.

Wir wollen aber nur den Krümmungsradius eines Normalschnittes haben. Zu dem Ende denken wir uns eine Curve auf der Fläche, die auch doppelt gekrümmt sein kann, deren Krümmungsradius aber mit dem eines Normalschnittes in dem betreffenden Punkte zusammenfällt. Dazu ist eben nur nöthig, dass in diesem Punkte die Krümmungsebene der Curve ein solcher Normalschnitt ist.

Die Krümmungsebene irgend einer Curve hat die Gleichung $\alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) + \gamma(\zeta - z) = 0$, worin nach § 8

$$\alpha = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2z}{dv^2} - \frac{dz}{dv}\cdot\frac{d^2y}{dv^2}, \; \beta = \frac{dz}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2} - \frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2z}{dv^2}, \; \gamma = \frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2x}{\partial v^2}$$

ist. Die Gleichungen der Normalen waren (§ 76):

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C}.$$

Damit also die Krümmungsebene durch die Normale geht, muss sein $\alpha\cdot A + \beta\cdot B + \gamma\cdot C = 0$. Der Ausdruck des vorigen Paragraphen für r lässt sich nun schreiben:

$$r = \frac{\left(\frac{ds}{dv}\right)^3}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Man hat ferner § 76 $\left(\frac{ds}{dv}\right)^3 = (Eu'^2 + 2Fu' + G)^{\frac{3}{2}}$.

Es ist aber identisch:

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(A^2 + B^2 + C^2) - (\alpha A + \beta B + \gamma C)^2 \\ = (\beta C - \gamma B)^2 + (\gamma A - \alpha C)^2 + (\alpha B - \beta A)^2,$$

oder, da das zweite Glied links verschwindet:

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(E\,.\,G - F^2) = S^2,$$

wenn man den Ausdruck rechts mit S^2 bezeichnet.

Multiplicirt man daher Zähler und Nenner in dem Ausdrucke für r mit $\sqrt{E\cdot G - F^2}$, so wird

$$r = \frac{\left(\frac{ds}{dv}\right)^3\cdot\sqrt{E\cdot G - F^2}}{S}.$$

Es ist aber

$$\beta C - \gamma B = \left(\frac{dz}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2} - \frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2z}{dv^2}\right) C - \left(\frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}\right) B,$$

das ist:

$$\beta C - \gamma B = \frac{d^2x}{dv^2}\left(C\cdot\frac{dz}{dv} + B\cdot\frac{dy}{dv}\right) - \frac{dx}{dv}\left(C\cdot\frac{d^2z}{dv^2} + B\cdot\frac{d^2y}{dv^2}\right),$$

oder:

$$\beta C - \gamma B = \frac{d^2x}{dv^2}\left(A\cdot\frac{dx}{dv} + B\cdot\frac{dy}{dv} + C\cdot\frac{dz}{dv}\right) - \frac{dx}{dv}\left(A\cdot\frac{d^2x}{dv^2} + B\cdot\frac{d^2y}{dv^2} + C\cdot\frac{d^2z}{dv^2}\right).$$

Es ist aber, wenn man für $\frac{dx}{dv}, \frac{dy}{dv}, \frac{dz}{dv}, \frac{d^2x}{dv^2}, \frac{d^2y}{dv^2}, \frac{d^2z}{dv^2}$ ihre im vorigen Paragraphen aufgestellten Werthe substituirt:

$$A\cdot\frac{dx}{dv} + B\cdot\frac{dy}{dv} + C\cdot\frac{dz}{dv} = 0,$$

und $$A\cdot\frac{d^2x}{dv^2} + B\cdot\frac{d^2y}{dv^2} + C\cdot\frac{d^2z}{dv^2} = Du'^2 + 2D'u' + D''.$$

Es wird somit

$$(\beta C - \gamma B)^2 = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 (Du'^2 + 2D'u' + D'')^2,$$

und da sich entsprechende Werthe für die beiden andern Glieder von S^2 ergeben:

$$S = \sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2}\,(Du'^2 + 2D'u' + D''),$$

und da

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2} = \frac{ds}{dv} = (Eu'^2 + 2Fu' + G)^{\frac{1}{2}}$$

ist, so ist endlich der Krümmungsradius eines jeden Normalschnittes

$$\varrho = \sqrt{E\cdot G - F^2}\cdot\frac{E\cdot u'^2 + 2F\cdot u' + G}{D\cdot u'^2 + 2D'\cdot u' + D''}.$$

Die Bedingung für die Nabelpunkte ergiebt sich aus dieser Formel für ϱ auf der Stelle. Denn da für den Nabelpunkt alle ϱ einander gleich sein müssen, und die verschiedenen ϱ in einem Punkte sich nur durch die Grösse u' unterscheiden, so ist die gesuchte Bedingung:

$$\frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}.$$

§ 80.

Um die Formeln für die Hauptschnitte für die jetzige Form der Gleichungen zu finden, gehen wir jetzt von der Euler'schen Definition derselben aus. Es entsteht also die Frage: Welches sind Maximum und Minimum von ϱ und zu welchen Werthen von u' gehören sie?

Da für die Normalschnitte, die durch einen Punkt M gehen, in dem Werthe von ϱ nur u' als veränderlich zu betrachten ist, der erste Factor von ϱ aber u' nicht enthält, so hat man es lediglich mit dem Maximum und Minimum von $t = \frac{E \cdot u'^2 + 2F \cdot u' + G}{D \cdot u'^2 + 2D' \cdot u' + D''}$ zu thun, wo $t = \frac{\varrho}{\sqrt{E \cdot G - F^2}}$ zu setzen ist und daher $\frac{dt}{du'} = 0$ zu setzen. Dies giebt

$$(Eu'^2 + 2D'u' + D'')\,(Eu' + F) - (Eu' - 2Fu' + G)\,(Du' + D') = 0.$$

Für die Hauptschnitte ist dann: $t = \frac{Eu' + F}{Du' + D'}$, wo die Werthe von u' aus der vorigen Gleichung zu entnehmen sind.

Wir können aber auch für t eine Gleichung herstellen, welche von u' ganz frei ist.

Die Gleichung $Eu' + F = (Du' + D')\,t$ multipliciren wir auf beiden Seiten mit u', wodurch wir erhalten $Eu'^2 + Fu' = (Du'^2 + D'u')t$, und diese Gleichung subtrahiren wir von der zuerst für t aufgestellten $Eu'^2 + 2Fu' + G = (Du'^2 + 2D'u' + D'')\,t$, wodurch wir folgende zweite Gleichung für t erhalten: $Fu' + G = (D'u' + D'')\,t$, aus welcher wir vermittelst der schon oben erwähnten Gleichung

$$Eu' + F = (Du' + D')t$$

die Grösse u' eliminiren. Dadurch entsteht folgende Gleichung für t: $(E - Dt)\,(G - D''t) - (F - D't)^2 = 0$, welche geordnet so lautet:

$$(DD'' - D'^2)t^2 - (ED'' - 2FD' + GD)t + EG - F^2 = 0,$$

und setzen wir endlich hierin statt t seinen Werth $\frac{\varrho}{\sqrt{E \cdot G - F^2}}$, so erhalten wir folgende quadratische Gleichung in ϱ, deren Wurzeln die beiden Hauptkrümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 sind:

$$\varrho^2\,(DD'' - D'^2) - \varrho\sqrt{E \cdot G - F^2}\,(ED'' - 2FD' + GD) + (EG - F^2)^2 = 0.$$

Die zugehörigen Werthe von u' erhält man aus:

$$u'^2\,(FD - ED') + u'\,(GD - ED'') + GD' - FD'' = 0,$$

oder wenn ϱ, also auch t bereits gefunden ist, aus der Gleichung: $Eu' + F = (Du' + D')t$. Ist dagegen u' mit Hülfe der vorletzten Gleichung bestimmt, so giebt die letzte ϱ.*)

---

*) Was übrigens den Ausdruck $\sqrt{EG - F^2}$ in ϱ anbetrifft, so muss dieser für beide Werthe von ϱ immer mit demselben Vorzeichen genommen werden.

§ 81.

Das Product der beiden Hauptkrümmungsradien ist offenbar $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{(EG - F^2)^2}{DD'' - D'^2}$.

Gauss hat nun gezeigt, dass der Nenner dieses Ausdrucks eine merkwürdige Umformung zulässt, dass er sich nämlich ganz durch E, F, G und die Differentialquotienten dieser Grössen nach u und v ausdrücken lässt. (Disquisitiones generales circa superficies curvas. Comm. Gott. rec. 1828.) Hier muss zunächst an den bekannten von Binet und Cauchy herrührenden Hauptsatz der Determinantentheorie, den sogenannten Multiplicationssatz erinnert werden, wonach das Product zweier Determinanten sich wieder als Determinante darstellen lässt, z. B. bei zwei Determinanten des dritten Grades:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\alpha + a'\beta + a''\gamma & b\alpha + b'\beta + b''\gamma & c\alpha + c'\beta + c''\gamma \\ a\alpha' + a'\beta' + a''\gamma' & b\alpha' + b'\beta' + b''\gamma' & c\alpha' + c'\beta' + c''\gamma' \\ a\alpha'' + a'\beta'' + a''\gamma' & b\alpha'' + b'\beta'' + b''\gamma'' & c\alpha'' + c'\beta'' + c''\gamma'' \end{vmatrix}.$$

Es ist nun

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad D'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ und}$$

$$D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \cdot \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \cdot \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \cdot \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \cdot \partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \cdot \partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \cdot \partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Bildet man nun DD'' und D'^2, mit Anwendung des eben angeführten Multiplicationssatzes, so erhält man, wenn Σ die Summe von Gliedern bezeichnet, welche in Bezug auf y und z so gebildet sind, wie das unter dem Symbol Σ stehende in Beziehung auf x, und wenn man der Kürze wegen setzt:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x', \quad \frac{\partial x}{\partial v} = x_1, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = x'', \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = x_1', \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = x_{11}, \quad \frac{dy}{du} = y' \text{ u. s. w.}$$

$$DD'' = \begin{vmatrix} \Sigma x'' x_{11} & \Sigma x' x_{11} & \Sigma x_1 x_{11} \\ \Sigma x' x'' & \Sigma x'^2 & \Sigma x' x_1 \\ \Sigma x_1 x'' & \Sigma x_1 x' & \Sigma x_1^2 \end{vmatrix};$$

für D'^2 ergiebt sich, wenn man die hier gegebenen beiden Werthe von D' nach obigem Satze mit einander multiplicirt:

$$D'^2 = \begin{vmatrix} \Sigma x_1'^2 & \Sigma x' x_1' & \Sigma x_1 x_1' \\ \Sigma x' x_1' & \Sigma x'^2 & \Sigma x' x_1 \\ \Sigma x_1 x_1' & \Sigma x' x_1 & \Sigma x_1^2 \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber:

$$E = \Sigma x'^2, \quad F = \Sigma x_1 x', \quad G = \Sigma x_1^2,$$

und man findet sogleich

$$\Sigma x' x_{11} = \sum \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \right\} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u},$$

$$\Sigma x_1 x_{11} = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v},$$

$$\Sigma x' x'' = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u},$$

$$\Sigma x_1 x'' = \sum \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \right\} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v},$$

$$\Sigma x' x_1' = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v},$$

$$\Sigma x_1 x_1' = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u},$$

also wird, weil man das Zeichen Σ unter das Differentialzeichen ∂ setzen kann:

$$D \cdot D'' = \begin{vmatrix} \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} & E & F \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & F & G \end{vmatrix}.$$

$$\text{und } D'^2 = \begin{vmatrix} \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \cdot \partial v} \right)^2 & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & E & F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{vmatrix}.$$

Bildet man nun die Differenz $D \cdot D'' - D'^2$, so erhält man ausser Gliedern, welche nur die Grössen E, F, G und deren Differentialquotienten enthalten, noch folgende Differenz:

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v_2} (EG - F^2) - \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \cdot \partial v}\right)^2 (EG - F^2).$$

Es kommt also nur noch darauf an, folgenden Ausdruck

$$\sum \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \cdot \partial v}\right)^2\right]$$

durch die genannten Grössen auszudrücken.

Das Product

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right)}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right]}{\partial v}$$

giebt, nach v differentiirt,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \cdot \partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial^2\left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right)}{\partial u \cdot \partial v} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right]}{\partial v^2}.$$

Das Product

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \cdot \partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{\partial u}$$

giebt, nach u differentiirt,

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \cdot \partial v}\right)^2 + \frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \cdot \partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{\partial u^2}.$$

Diese Gleichung von der vorigen subtrahirt, ergiebt

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \cdot \partial v}\right)^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right)}{\partial u \cdot \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right]}{\partial v^2},$$

also wird die gesuchte Summe

$$\sum \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \cdot \partial v}\right)^2\right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \cdot \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial v^2},$$

und man erhält schliesslich durch Auflösung der Determinanten:

$$\begin{aligned} 4(DD'' - D'^2) = {} & E\left[\frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right] \\ & + F\left(\frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + 4\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v}\right) \\ & + G\left[\frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial E}{\partial u} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right] \\ & - 2(EG - F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \cdot \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right). \end{aligned}$$

Diese Gleichung heisst die **Gaussische** Relation.

§ 82.

Wenn wir nun zwei Flächen betrachten, deren Gleichungen folgende beiden Systeme sein mögen: $x = f(u, v)$, $y = f_1(u, v)$, $z = f_2(u, v)$ und $x = \varphi(u, v)$, $y = \varphi_1(u, v)$, $z = \varphi_2(u, v)$, so erhalten wir für

jedes Werthepaar u, v einen bestimmten Punkt auf der einen und einen bestimmten Punkt auf der anderen Fläche. Es entspricht also im Allgemeinen jedem Punkte der einen Fläche ein Punkt der andern Fläche. Dieses Correspondiren der Punkte ist ein ganz eigenthümliches, wenn der Fall eintritt, dass die Grössen, welche wir oben mit E, F, G bezeichnet haben, in beiden Flächen denselben Werth haben. Alsdann ist nämlich der Ausdruck für das Curvenelement $\sqrt{E du^2 + 2 F du dv + G dv^2}$ auf der einen Fläche identisch mit dem für das Element der correspondirenden Curve auf der andern Fläche. Folglich haben entsprechende Curvenelemente auf beiden Flächen gleiche Längen. Denkt man sich nun die eine Fläche auf irgend eine Weise in Dreiecke mit unendlich kleinen Seiten zerlegt, so wird, da jeder dieser Seiten eine gleiche auf der andern Fläche entspricht, die letztere in ein System von Dreiecken, das dem der ersteren entsprechend congruent ist, zerlegt; es lässt sich dann also bloss durch Biegung der ersteren Fläche dieselbe mit der letzteren zur Deckung bringen, d. h.: Sind für zwei Flächen die Werthe von E, F, G dieselben Functionen zweier Grössen u und v, so kann man jede aus der andern durch Biegung entstanden denken.

Da andrerseits nach dem vorigen Paragraphen das Product der beiden Hauptkrümmungsradien allein von den Grössen E, F, G abhängt, so muss es, wenn diese Grössen für die beiden vorliegenden Flächen identisch sind, ebenfalls für beide Flächen gleich sein und zwar in je zwei entsprechenden Punkten der beiden Flächen, d. h. in je zwei Punkten, welche zu demselben Werthe u, v gehören. Demnach haben wir folgenden von Gauss aufgestellten, merkwürdigen

Lehrsatz: Wenn von zwei Flächen die eine eine Biegung der andern ist, so ist in je zwei entsprechenden Punkten das Product der Hauptkrümmungsradien für beide Flächen gleich.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz führt auf die Untersuchung derjenigen Eigenschaften der Flächen, welche bleiben, wenn man die Flächen biegt. Dahin gehört z. B. folgender selbstverständliche Satz: Wenn man auf einer Fläche zwei Punkte A und B durch eine kürzeste Linie verbindet, so bleibt diese Linie die kürzeste zwischen den beiden Punkten, wie man auch die Fläche biegen mag.

Ein ganz specieller Fall dieser Biegung der Flächen ist schon von Euler behandelt worden, und nach ihm von Monge und einer grossen Anzahl Mathematiker. Diese haben nämlich schon früher diejenigen Flächen betrachtet, welche durch Biegung einer Ebene entstehen, welche also ohne Faltung und Dehnung in eine Ebene

verwandelt werden können. Solche Flächen nennt man **abwickelbare Flächen.** Für sie folgt sofort, dass das Product ihrer beiden Hauptkrümmungsradien unendlich ist, weil bei einer Ebene alle, auch die beiden Hauptkrümmungsradien unendlich sind. Nach der Gleichung für die beiden Hauptkrümmungsradien (§ 58) ist aber ihr Product gleich $\frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}$. Dieser Ausdruck wird allgemein gleich unendlich, wenn der Nenner Null wird. Die Differentialgleichung aller abwickelbaren Flächen ist also

$$rt - s^2 = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2 = 0.$$

Diese partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung integrirt, giebt die endliche Gleichung aller abwickelbaren Flächen.

§ 83.

Ein zweiter Satz von Gauss beantwortet die sich leicht darbietende Frage:

Giebt es für die Flächen etwas, was der Krümmung der Curven entspricht?

Untersuchungen, die sich auf Elasticität beziehen, haben Sophie Germain (Crelle's Journal Bd. 7) veranlasst, den Ausdruck $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ als Krümmung der Fläche anzusehen; aber diese Analogie ist, vom geometrischen Standpunkte aus wenigstens, nicht stichhaltig; Gauss hat eine vollständige Analogie aufgefunden durch folgende Untersuchung.

Man denke sich eine ebene Curve und irgendwo mit dem Radius 1 einen Kreis beschrieben, Fig. 31a und 31b. Man zieht zwei Normalen der Curve in benachbarten Punkten und dazu zwei parallele Radien des Kreises. Der Curvenbogen zwischen den beiden Normalen heisse s, der entsprechende d. h. zwischen den beiden parallel gezogenen Radien eingeschlossene Kreisbogen heisse σ.

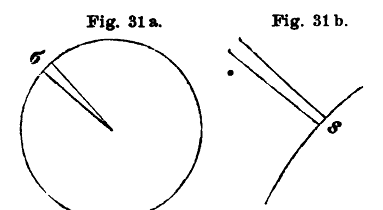


Fig. 31a. Fig. 31b.

Dann ist offenbar der Winkel der beiden Normalen gleich dem Winkel der beiden Radien, d. h. gleich σ. Der Winkel der beiden Normalen ist aber andrerseits derselbe, welchen die zugehörigen beiden Tangenten der Curve mit einander bilden: mithin ist σ gleich dem Contingenzwinkel. Daraus geht hervor, dass man die Erklärung des Krümmungsradius, die man gewöhnlich giebt, nämlich Bogenelement durch Contingenzwinkel, auch so angeben kann: der Krüm-

mungsradius einer Curve ist gleich dem unendlich kleinen Bogen s, dividirt durch den unendlich kleinen Bogen σ des Kreises; und folglich ist die Krümmung der Curven $= \lim \frac{\sigma}{s}$.

Dies lässt auf der Stelle eine Erweiterung für die Flächen zu. Man denke sich irgend eine Fläche und eine Kugel vom Radius 1. Auf der Fläche nehme man irgend ein begrenztes Stück an und ziehe entlang der Grenze desselben Normalen zur Fläche. Man ziehe ferner vom Mittelpunkte der Kugel Strahlen, die diesen Normalen parallel sind, wodurch man auf der Kugel ebenfalls ein begrenztes Stück erhält. Das Flächenstück sei wiederum s, das auf der Kugel σ. Denkt man sich beide Stücke unendlich klein, so nimmt Gauss wiederum den Quotienten $\frac{\sigma}{s}$ als Krümmung der Fläche an; also Krümmung der Fläche $= \lim \frac{\sigma}{s}$.

Diesen Quotienten wollen wir nun in der gewöhnlichen Art ausdrücken und schieben für diesen Zweck noch Einiges ein.

Seien ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes der Kugelfläche, auf den Mittelpunkt als Anfangspunkt bezogen, also $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$.

Mögen ξ, η, ζ durch dieselben Grössen u, v ausgedrückt sein, von welchen die Coordinaten der Fläche x, y, z abhängen. Die Cosinus der Winkel eines Radius mit den Axen sind dann $\frac{\xi}{r}, \frac{\eta}{r}, \frac{\zeta}{r}$, oder, da $r = 1$: ξ, η, ζ. Da dieser Radius aber der entsprechenden Normale der Fläche parallel ist, so hat man (§ 76):

$$\xi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \eta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \zeta = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

oder, wenn $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ist, $\xi = \lambda A$, $\eta = \lambda B$, $\zeta = \lambda C$.

Versteht man nun unter A_1, B_1, C_1 dieselben Werthe der Differentialquotienten von ξ, η, ζ, wie A, B, C von x, y, z § 73, ist also

$$A_1 = \frac{\partial \eta}{\partial u}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial u}, \quad B_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial u}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \zeta}{\partial v}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad C_1 = \frac{\partial \xi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial u}$$

und setzen wir

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},$$

so erhalten die obigen drei Cosinus, da der Radius Normale der Kugel ist, auch die Werthe:

$$\xi = \lambda_1 A_1, \quad \eta = \lambda_1 B_1, \quad \zeta = \lambda_1 C_1,$$

also wegen der Gleichung der Kugel ist

$$\lambda_1^2(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) = 1.$$

Andrerseits giebt die Gleichung $\xi \cdot \xi + \eta \cdot \eta + \zeta \cdot \zeta = 1$ auch

$$\lambda_1 \{ \xi A_1 + \eta B_1 + \zeta C_1 \} = 1.$$

Daraus folgt:

$$\xi A_1 + \eta B_1 + \zeta C_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2},$$

und somit auch

$$\{ \xi A_1 + \eta B_1 + \zeta C_1 \} \, du \, dv = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot du \, dv,$$

d. h. (§ 75) gleich dem Flächenelement der Kugel. Also: Drückt man die drei Coordinaten ξ, η, ζ der Kugel $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ durch zwei Grössen u und v aus, so ist das Oberflächenelement der Kugel gleich

$$\left\{ \xi \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right) + \eta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \zeta}{\partial v} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial u} \right) + \zeta \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) \right\} du dv.$$

Diese Formel wollen wir noch ein wenig transformiren, indem wir die auf die gegebene Fläche bezüglichen Grössen λ, A, B, C einführen. Es war:

$$\xi = \lambda A, \quad \eta = \lambda B, \quad \zeta = \lambda C, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Mithin:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \lambda \frac{\partial A}{\partial u} + A \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \lambda \frac{\partial A}{\partial v} + A \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = \lambda \frac{dB}{\partial u} + B \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \lambda \frac{\partial B}{\partial v} + B \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

u. s. w., folglich wird

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v}$$

$$= \lambda^2 \left\{ \frac{\partial A}{\partial u} \cdot \frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial v} \cdot \frac{\partial B}{\partial u} \right\} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left\{ A \frac{\partial B}{\partial v} - B \frac{\partial A}{\partial v} \right\} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \left\{ B \frac{\partial A}{\partial u} - A \frac{\partial B}{\partial u} \right\}$$

und ähnlich

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \zeta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v}$$

$$= \lambda^2 \left\{ \frac{\partial B}{\partial u} \cdot \frac{\partial C}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial v} \cdot \frac{\partial C}{\partial u} \right\} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left\{ B \frac{\partial C}{\partial v} - C \frac{\partial B}{\partial v} \right\} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \left\{ C \frac{dB}{\partial u} - B \frac{\partial C}{\partial u} \right\}$$

und

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial v}$$

$$= \lambda^2 \left\{ \frac{\partial C}{\partial u} \cdot \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial v} \cdot \frac{\partial A}{\partial u} \right\} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left\{ C \frac{\partial A}{\partial v} - A \frac{\partial C}{\partial v} \right\} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \left\{ A \frac{\partial C}{\partial u} - C \frac{\partial A}{\partial u} \right\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen links mit ζ, ξ, η und rechts mit den äquivalenten $\lambda C, \lambda A, \lambda B$, und addirt dann, so bleiben auf der rechten Seite nur die Glieder, welche mit λ^3 multiplicirt sind, und es wird folglich, wenn man noch statt λ seinen Werth $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ einsetzt,

$$\xi\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial v}-\frac{\partial\zeta}{\partial u}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)+\eta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial v}-\frac{\partial\xi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)+\zeta\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial v}-\frac{\partial\eta}{\partial u}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)$$
$$=\frac{1}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{A\left(\frac{\partial B}{\partial u}\cdot\frac{\partial C}{\partial v}-\frac{\partial B}{\partial v}\cdot\frac{\partial C}{\partial u}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial u}\cdot\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{\partial C}{\partial v}\cdot\frac{\partial A}{\partial u}\right)\right.$$
$$\left.+C\left(\frac{\partial A}{\partial u}\cdot\frac{\partial B}{\partial v}-\frac{\partial A}{\partial v}\cdot\frac{\partial B}{\partial u}\right)\right\}.$$

Man erhält also das Oberflächenelement der Kugel

$$=\frac{A\left(\frac{\partial B}{\partial u}\cdot\frac{\partial C}{\partial v}-\frac{\partial B}{\partial v}\cdot\frac{\partial C}{\partial u}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial u}\cdot\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{\partial C}{\partial v}\cdot\frac{\partial A}{\partial u}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial u}\cdot\frac{\partial B}{\partial v}-\frac{\partial A}{\partial v}\cdot\frac{\partial B}{\partial u}\right)}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}\,du\,dv,$$

worin A, B, C die oben festgesetzten Werthe haben.

Das Element der vorliegenden Oberfläche ist aber $=(A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}du\,dv$. Demgemäss findet man folgenden Ausdruck für die Krümmung einer Fläche:

$$=\frac{A\left(\frac{\partial B}{\partial u}\cdot\frac{\partial C}{\partial v}+\frac{\partial B}{\partial v}\cdot\frac{\partial C}{\partial u}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial u}\cdot\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{\partial C}{\partial v}\cdot\frac{\partial A}{\partial u}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial u}\cdot\frac{\partial B}{dv}-\frac{\partial A}{\partial v}\cdot\frac{\partial B}{\partial u}\right)}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

Um diesen Ausdruck zu interpretiren, nehmen wir an, die Gleichung der Fläche sei $z=f(x,y)$ oder:

$$z=f(u,v),\quad x=u,\quad y=v.$$

Alsdann wird $A=\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial y}$ oder $=-\frac{\partial z}{\partial x}$ oder $A=-p$, ebenso $B=-q$, $C=1$. Sind wieder die zweiten Differentialquotienten von z nach x und y bezüglich r, s, t, so ist:

$$\frac{\partial A}{\partial u}=-r,\quad \frac{\partial A}{\partial v}=-s,\quad \frac{\partial B}{\partial u}=-s,\quad \frac{\partial B}{\partial v}=-t,\quad \frac{\partial C}{\partial u}\text{ und }\frac{\partial C}{\partial v}=0.$$

Dadurch wird die Krümmung der Fläche

$$\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}\text{ d. i. }=\frac{1}{\varrho_1\cdot\varrho_2}$$

oder gleich dem reciproken Werthe des Products der beiden Krümmungsradien.

Wir haben also den Satz: Begrenzt man ein nach beiden Dimensionen unendlich kleines Stück einer Fläche durch eine beliebige geschlossene Curve, und zieht die Strahlen der Hilfskugel, die den Normalen der Fläche längs dieser Curve parallel sind, wodurch man ebenfalls ein Oberflächenelement auf der Kugel erhält, so ist der

Quotient $\frac{\text{Kugeloberflächenelement}}{\text{Oberflächenelement}}=\frac{1}{\text{Product d. beiden Hauptkrümmungsradien}}$

oder in unseren Zeichen $\frac{\sigma}{s}=\frac{1}{\varrho_1\cdot\varrho_2}$. Denn beide Ausdrücke geben die Krümmung an.

Dies ist ganz analog dem, was wir bei den Curven gefunden haben.

Verbindet man dieses Resultat mit dem des vorigen Paragraphen, so findet sich:

Wenn man eine Fläche biegt, so ändert sich ihre Krümmung (in diesem Sinne genommen) nicht.

§ 84.

Suchen wir jetzt in Bezug auf unsere Darstellung die Gleichungen der Krümmungslinien, d. h. diejenige Gleichung zwischen u und v, welche für dieselben gilt.

Wir nehmen also an: x, y, z seien gegeben als Functionen von u und v. Es ist alsdann unsere Aufgabe nur, eine Gleichung zwischen u und v zu finden. Die Bedingung der Krümmungscurve ist die, dass ihre Tangenten Haupttangenten der Fläche sind. Die Tangente einer Curve in irgend einem Punkte hängt aber ab von dem betreffenden Werthe des $\frac{du}{dv}$. Die Bedingung dafür, dass eine Linie, hier die Tangente an die Krümmungscurve, Haupttangente an die Fläche sei, ist aber nach § 80:

$$u'^2(FD - ED') + u'(GD + ED'') + GD' - FD'' = 0.$$

Dies ist daher zugleich die Differentialgleichung für die Krümmungscurven. Diese Gleichung zweiten Grades und erster Ordlöse man nach $\frac{du}{dv}$ auf. Die beiden verschiedenen Werthe, welche man dafür findet, hat man zu integriren, und erhält dadurch zwei endliche Gleichungen, von denen jede wegen des in in ihr enthaltenen willkürlichen Parameters ein System von Curven darstellt; und zwar bezieht sich die eine Gleichung auf das eine System von Krümmungscurven, die andere auf das zweite.

Ist z als Function von x und y gegeben, d. h. hat man $z = f(x, y)$ oder $z = f(u, v)$, $x = u$, $y = v$, so wird $\frac{du}{dv} = \frac{dx}{dy}$, $A = -p$, $B = -q$, $C = 1$, $E = 1 + p^2$, $F = pq$, $G = 1 + q^2$, $D = r$, $D' = s$, $D'' = t$; also wird die Gleichung der beiden Krümmungscurven für diese Form der Gleichung der Fläche folgende:

$$dx^2(pqr - (1 + p^2)s) + dx \cdot dy((1 + q^2)r - (1 + p^2)t) + dy^2((1 + q^2)s - pqt) = 0,$$

welche wir schon früher gefunden haben. Hierin sind p, q, r, s, t Functionen von x und y allein; ein etwa darin vorkommendes z hat man mittelst der Gleichung der Fläche $z = f(x, y)$ zu eliminiren. Integrirt man daher die gefundene Differentialgleichung, so erhält

man die Projectionen der Krümmungscurven auf die Ebene der xy, zu welchen man die Gleichung der Fläche zu nehmen hat, um die Gleichungen der Krümmungscurven selbst zu haben.

Um ein Beispiel für die Bestimmung der Krümmungslinien aus der allgemeinen Formel zu geben, wählen wir die Schraubenfläche. Deren Gleichungen waren:

$$x = v\cos u,\quad y = v\sin u,\quad z = \alpha u,$$

also:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -v\sin u,\quad \frac{\partial y}{\partial u} = v\cos u,\quad \frac{\partial z}{\partial u} = \alpha,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -v\cos u,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = -v\sin u,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \cos u,\quad \frac{\partial y}{\partial v} = \sin u,\quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = -\sin u,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} = \cos u,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

also: $A = -\alpha\sin u,\quad B = \alpha\cos u,\quad C = -v,\quad E = \alpha^2 + v^2,$

$$F = 0,\quad G = 1,\quad D = 0,\quad D' = \alpha,\quad D'' = 0,$$

und unsere Gleichung wird:

$$-u'^2\alpha(\alpha^2 + v^2) + \alpha = 0 \quad \text{oder:} \quad u'^2 = \frac{1}{\alpha^2 + v^2},$$

$$u = c \pm \int \frac{dv}{\sqrt{\alpha^2 + v^2}} = c \pm \lg\left(v + \sqrt{\alpha^2 + v^2}\right).$$

Wären wir von der Form $z = \alpha \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ausgegangen, so würde die Rechnung eine noch viel schwierigere gewesen sein. Aus § 80 folgt noch:

$$t = \frac{Eu' + F}{Du' + D} = \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 + v^2}}{\alpha},\ \text{also}\ \varrho = \pm \frac{\alpha^2 + v^2}{\alpha}.$$

Die Krümmungsradien sind also beide gleich, aber entgegengesetzt gerichtet.

Die Cosinus der Winkel der Normale mit den Axen werden (§ 76) bezüglich:

$$\lambda = -\frac{\alpha\sin u}{\sqrt{\alpha^2 + v^2}},\quad \mu = \frac{\alpha\cos v}{\sqrt{\alpha^2 + v^2}},\quad \nu = -\frac{v}{\alpha^2 + v^2}.$$

Setzen wir nun in die Formeln $\xi - x = \varrho\lambda$ u. s. w., wo ξ, η, ζ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind, ein, so erhalten wir die Gleichungen der Evolutenfläche:

$$\xi = v\cos u \mp \sin u\sqrt{\alpha^2 + v^2},\quad \eta = v\sin u \pm \cos u\sqrt{\alpha^2 + v^2},$$

$$\zeta = \alpha u \pm \frac{v\sqrt{\alpha^2 + u^2}}{\alpha}.$$

§ 85.

Zu den Untersuchungen über Krümmungscurven gehört auch die Frage: Ist es möglich, dass eine Fläche eine ebene Krümmungscurve haben kann? und in welchem Falle? Angenommen, es gebe in einer Fläche eine ebene Krümmungscurve, so machen wir die Ebene derselben zur xy-Ebene. Dadurch wird offenbar $dz = 0$, was auch dann noch der Fall ist, wenn die Curve in einer Ebene liegt, welche der xy-Ebene parallel ist; denn alsdann ändert sich z nicht. Die Gleichung der Krümmungscurven (§ 64) $\frac{pdz + dx}{dp} = \frac{qdz + dy}{dq}$ geht also über in $\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dq}$. Ist die Gleichung der Fläche $z = f(x, y)$, so ist die Gleichung der ebenen Curve $0 = f(x, y)$, und wenn man dies differentiirt, so wird $0 = p \cdot dx + q \cdot dy$; also wird $\frac{dx}{dy}$ einerseits $= -\frac{q}{p}$, andrerseits $= \frac{dp}{dq}$; folglich hat man für diese Flächen die Gleichung $p \cdot dp + q \cdot dq = 0$, welche integrirt giebt $p^2 + q^2 = c$; d. h. die beiden Functionen p und q müssen für diesen Durchschnitt mit der xy-Ebene die Eigenschaft haben, dass die Summe ihrer Quadrate constant ist. Man kann dies auch geometrisch so ausdrücken:

Da die Gleichung der Tangentialebene T folgende ist:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

also der Cosinus des Winkels der Tangentialebene mit Ebene xy

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

so muss in gegenwärtigem Falle die Tangentialebene gegen die xy-Ebene oder gegen den Schnitt eine constante Neigung haben. Mit andern Worten:

Wenn eine Krümmungscurve eben ist, so bilden die Tangentialebenen entlang der Krümmungscurve mit der Ebene der Krümmungscurve einen constanten Winkel.

Der Satz gilt auch umgekehrt: Bilden die Tangentialebenen einer Fläche entlang einer ebenen Curve derselben mit der Ebene der letzteren einen constanten Winkel, so ist dies eine Krümmungscurve.

Beweis. Die ebene Curve sei die xy-Ebene; dann findet folgende Gleichung statt: $dz = 0$ oder $p \cdot dx + q \cdot dy = 0$. Da ferner die Tangentialebene mit dieser Schnittebene einen constanten Winkel bildet, so ist ($p^2 + q^2 = c$ oder) $pdp + qdq = 0$. Diese beiden

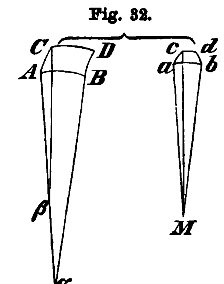
Gleichungen befriedigen aber die am Ende des vorigen Paragraphen aufgestellte Gleichung der Krümmungscurven.

Bei den Rotationsflächen umhüllen die Tangentialebenen entlang dem Meridian einen Cylinder, von welchem der Meridian normaler Schnitt ist. Bei den Parallelkreisen umhüllen sie einen Umdrehungskegel und sind ebenfalls alle gegen den Schnitt gleich geneigt. Die durch je zwei Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades gehenden Schnitte sind Krümmungslinien, denn die Tangentialebene ihnen entlang steht immer normal auf ihnen.

§ 86.

Die Theorie der Krümmungslinien giebt uns auch einen sehr einfachen Beweis für den oben durch eine weitläufige Rechnung gefundenen Gaussischen Satz, dass der Quotient $\frac{\sigma}{s}$ gleich $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ ist. Betrachten wir nämlich ein unendlich kleines, von je zwei Krümmungslinien beider Systeme begrenztes, also als eben zu betrachtendes Viereck (Fig. 32) $ABDC$.

Fig. 32.



Die Normale durch $A\,A\alpha$ werde von der durch B gehenden in α, von der durch C gehenden in β geschnitten. In einer Kugel mit dem Radius 1 ziehe man jetzt vier den durch A, B, D, C gehenden Normalen parallele Radien, welche auf der Kugelfläche ebenfalls ein Viereck $abdc$ abschneiden. Im letzteren ist der Winkel $cab = CAB$ ein rechter, da die Seitenflächen Mac und Mab bezüglich mit βAC und αAB parallel, cab aber ihr Neigungswinkel ist. Daher sind beide Vierecke als Rechtecke zu betrachten. Man hat also

$$s = AB \cdot AC, \quad \sigma = ab \cdot ac.$$

Nun ist, wenn wir den Winkel $A\alpha B$ mit α, $A\beta C$ mit β bezeichnen:

$$AB = \varrho_1 \alpha, \quad AC = \varrho_2 \beta, \quad ab = \alpha, \quad ac = \beta,$$

woraus unmittelbar sich ergiebt: $\frac{s}{\sigma} = \varrho_1 \varrho_2$.

Nehmen wir nun ein beliebiges Element der Oberfläche S, so lässt sich dasselbe durch hindurchgelegte Krümmungslinien in Theile s, und die entsprechende Figur auf der Kugelfläche Σ in solche Theile σ zerlegen, so dass auch jetzt $\frac{S}{\Sigma} = \varrho_1 \varrho_2$ ist, da die Unterschiede von ϱ_1 und ϱ_2 in den verschiedenen Theilen gegen ihre Grösse verschwindend klein sind.

§ 87.

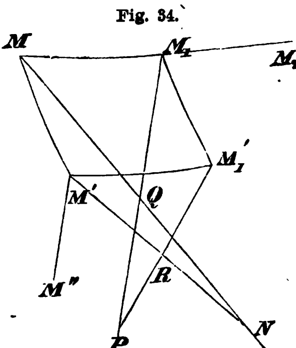
Die Darstellung der Coordinaten einer Fläche durch zwei Variable giebt noch zu einer Reihe allgemeiner Betrachtungen Anlass.

Die Gleichungen $x = f(u, v)$, $y = f_1(u, v)$, $z = f_2(u, v)$ stellen immer, wie wir gesehen haben, dann eine Linie auf der Fläche dar, wenn u als Function von v gegeben ist. Setzt man u als beliebige Constante, so hat man eine Schaar, und setzt man v als eine solche, eine zweite Schaar solcher Linien. Wir wollen aber auch zeigen, dass, wenn umgekehrt zwei Schaaren von Linien auf einer Fläche gegeben sind, sich die Grössen u und v immer so wählen lassen, dass die Gleichung $u =$ const. die erste Schaar, $v =$ const. die zweite Schaar ergiebt. Am einfachsten geschieht diese Bestimmung auf folgende Art. Wir legen durch einen als fest angenommenen Punkt A der Fläche eine Linie AU von der ersten, und eine AV von der zweiten Schaar, dann durch einen beliebigen Punkt M der Fläche eine Linie MP der ersten Schaar (Fig. 33), welche AV in P trifft, ebenso eine Linie MN der zweiten Schaar, welche AU in N trifft, und setzen bezüglich die veränderlichen Längen AN und AP gleich u und v.

Fig. 33.

Es ist dann klar, dass auf der Linie MP die Grösse v und auf MN die Grösse u unverändert bleibt. Ein Fortschreiten auf der Linie MP um ein unendlich Kleines wird dann durch Differentiiren von x, y, z nach u, ein solches auf Linie MN durch Differentiiren nach v allein angezeigt; soll aber in beliebiger Richtung von M fortgeschritten werden, so ist nach u und v gleichzeitig zu differentiiren. Statt der Bezeichnungen: $\frac{\partial x}{\partial u} du$ und $\frac{\partial x}{\partial v} dv$ wollen wir aber uns kürzerer Bezeichnungen bedienen, indem wir im Differentiiren nach u durch das Zeichen d, ein solches nach v durch das Zeichen d_1 andeuten, es ist dann nach den Elementen der Differentialrechnung:

Fig. 34.



$$d d_1 f(u, v) = d_1 d f(u, v).$$

Wir wollen diese Betrachtungen jetzt auf die Krümmungslinien anwenden.

Wir gehen hier davon aus, dass zwei nächste Normalen der Fläche, welche durch die Punkte M und M' der letzteren gehen (Fig. 34), sich in einem Punkte N schneiden,

und die Länge $MN = M'N$ den Krümmungradius ϱ giebt. Sind x, y, z die Coordinaten von M, so kann man für jede aus der einen Schaar der die Fläche erfüllenden Krümmungslinien nach dem Obigen v als constant annehmen und demgemäss das Fortschreiten auf einer solchen durch das Zeichen d anzeigen. Sind dann ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes N, λ, μ, ν die Richtungscosinus der Normale MN, so sind die Projectionen von MN auf die drei Axen $x - \xi = \varrho\lambda$, $y - \eta = \varrho\mu$, $z - \zeta = \varrho\nu$, wenn man die Richtung von N nach M als positiv betrachtet. Für $M'N$ ist bei unverändertem ϱ zu vertauschen x mit $x + dx$, λ mit $\lambda + d\lambda$ u. s. w., also:

$$x + dx - \xi = \varrho(\lambda + d\lambda), \quad y + dy - \eta = \varrho(\mu + d\mu),$$
$$z + dz - \zeta = \varrho(\nu + d\nu),$$

also durch Subtraction:

$$1) \qquad dx = \varrho d\lambda, \quad dy = \varrho d\mu, \quad dz = \varrho d\nu,$$

wie schon früher gefunden.

Ist nun M_1 ein M benachbarter Punkt der durch M gehenden zweiten Krümmungslinie, so wird der Uebergang von M nach M_1 durch das Zeichen d_1 angedeutet; ist dann noch ϱ_1 der Krümmungsradius MP, so erhalten wir die Gleichungen:

$$2) \qquad d_1 x = \varrho_1 d_1 \lambda, \quad d_1 y = \varrho_1 d_1 \mu, \quad d_1 z = \varrho_1 d_1 \nu.$$

In jedem Systeme 1) oder 2) dient eine Gleichung zur Bestimmung von ϱ und ϱ_1. Multipliciren wir alle drei Gleichungen bezüglich mit λ, μ, ν und addiren, so erhält man:

$$3) \qquad \lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0, \quad \lambda d_1 x + \mu d_1 y + \nu d_1 z = 0.$$

Dies ist bekanntlich die Differentialgleichung der Fläche, und jede dieser Gleichungen in Verbindung mit zweien des entsprechenden Systemes 1) oder 2) oder einer dieser Gleichungen, wenn ϱ und ϱ_1 bestimmt ist, giebt die Differentialgleichungen der Krümmungslinie. Die weitere Ausführung dieser Rechnung ist bereits an anderer Stelle gegeben. Wir wollen indess hier unsere Gleichungen noch umformen.

Zu dem Ende differentiiren wir die erste der Gleichungen 3) nach dem Zeichen d_1 und die zweite nach dem Zeichen d, wir erhalten:

$$\lambda dd_1 x + \mu dd_1 y + \nu dd_1 z + d_1 \lambda dx + d_1 \mu dy + d_1 \nu dz = 0,$$
$$\lambda dd_1 x + \mu dd_1 y + \nu dd_1 z + d\lambda d_1 x + d\mu d_1 y + d\nu d_1 z = 0.$$

Also:

$$d\lambda d_1 x + d\mu d_1 y + d\nu d_1 z = d_1 \lambda dx + d_1 \mu dy + d_1 \nu dz.$$

Multipliciren wir aber die Gleichungen 1) bezüglich mit d_1x, d_1y, d_1z und addiren, und verfahren wir ebenso mit den Gleichungen 2), die wir mit dx, dy, dz multipliciren, so haben wir:

$$\varrho(d\lambda d_1x + d\mu d_1y + d\nu d_1z) = \varrho_1(d_1\lambda dx + d_1\mu dy + d_1\nu dz).$$

Also entweder $\varrho = \varrho_1$, was nicht möglich ist, wenn wir Nabelpunkte ausschliessen, oder:

4)
$$d\lambda d_1x + d\mu d_1y + d\nu d_1z = 0,$$
$$d_1\lambda dx + d_1\mu dy + d_1\nu dz = 0,$$

und es ist dann auch:

5)
$$\lambda dd_1x + \mu dd_1y + \nu dd_1z = 0.$$

Diese letzte Gleichung, übrigens eine Folge der Gleichungen 3) und 4), giebt einen Beweis dafür, dass die durch M und M_1 gelegten Curvenelemente oder Tangenten in eine Ebene fallen, dass also MM' die conjugirte Tangente von MM_1 ist (§ 54 Schluss). Ist nämlich M_1M_1' eine Krümmungslinie des ersten, $M'M_1'$ eine solche des zweiten Systems, so sind die Coordinaten des Punktes M_1' bezüglich:

$$x + dx + d_1(x + dx), \quad y + dy + d_1(y + dy),$$
$$z + dz + d_1(z + dz),$$

oder
$$x + dx + d_1x + dd_1x \quad \text{u. s. w.}$$

Bezeichnen wir diese Coordinaten des Punktes M_1' bezüglich mit Δx, Δy, Δz, so erhält man, wenn man Gleichung 5) zu beiden Gleichungen 3) addirt:

$$\lambda\Delta x + \mu\Delta y + \nu\Delta z = 0.$$

Man sieht aber leicht, dass Δx, Δy, Δz proportional den Richtungscosinus der Diagonale MM_1' sind, und diese Gleichung zeigt also, dass diese Diagonale eben so wie die Seiten MM' und MM_1 auf der Normale MN senkrecht stehen, mithin das Viereck $MM'M_1'M_1$ ein ebenes ist.

Auch können wir leicht zeigen, dass sich zwei Krümmungslinien aus verschiedenen Systemen rechtwinklig schneiden. Multipliciren wir nämlich die Gleichungen 1) bezüglich mit d_1x, d_1y, d_1z und addiren, so erhalten wir wegen Gleichung 4):

6)
$$dxd_1x + dyd_1y + dzd_1z = 0,$$

was diesen Satz beweist.

Da nun die Gleichungen 5) und 6), wie eben gezeigt, die Bedingungen dafür geben, dass die beiden Liniensysteme in jedem Schnittpunkte conjugirte und aufeinander senkrechte Tangenten haben, diese beiden Eigenschaften aber ebenfalls die Krümmungslinien de-

finiren, so geben diese Gleichungen 5) und 6) die nothwendige und ausreichende Bedingung, dass beide Systeme Krümmungslinien geben.

In der That kann man aus diesen Gleichungen 5) und 6) in Verbindung mit den Gleichungen 3) (welches die Differentialgleichung der Fläche ist), oder was dasselbe ist aus den Gleichungen 3), 4) und 6), da die Gleichungen 4) eine Folge von 3) und 5) sind, die Gleichungen der Krümmungslinien erhalten.

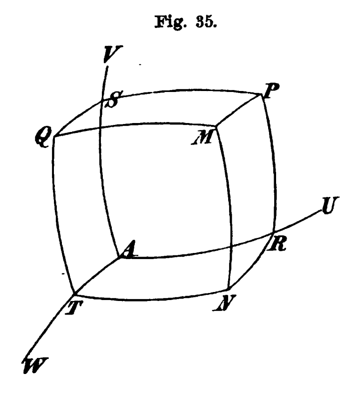
Multiplicirt man nämlich die erste Gleichung 3) mit h, die zweite Gleichung 4) mit k und addirt beides zu Gleichung 6), so ergiebt sich, wenn man um h und k zu bestimmen die Factoren von dx und dy gleich Null setzt:

$$h\lambda + kd_1\lambda + d_1x = 0, \quad h\mu + kd_1\mu + d_1y = 0,$$
$$h\nu + kd_1\nu + d_1z = 0.$$

Multiplicirt man aber bezüglich mit λ, μ, ν und addirt, so wird $h = 0$, und die letzten drei Gleichungen sind dann die Gleichungen 2), wenn $\varrho = -k$ gesetzt wird.

Wir wollen aber auch aus diesen Gleichungen einen Beweis für den Dupin'schen Satz ableiten. Zu dem Ende ist aber noch Folgendes zu bemerken. Die obigen Betrachtungen beziehen sich auf ein Coordinatensystem u und v für Linien auf einer Fläche. Es lässt sich dies System aber auch ausdehnen für Flächenschaaren.

Fig. 35.



Denken wir uns drei Schaaren von Flächen (Fig. 35), welche einen körperlichen Raum ausfüllen und die wir mit I, II, III bezeichnen wollen. Durch einen festen Punkt A im Raume legen wir nun die drei Flächen WAV aus Schaar I, WAU aus Schaar II, UAV aus Schaar III, die sich bezüglich in den Curven AU, AV und AW schneiden.

Ferner legen wir durch den veränderlichen Punkt M drei entsprechende Flächen NMP, PMQ und NMQ. Die von den Curven AU, AV und AW bezüglich durch diese Flächen abgeschnittenen Stücke AR, AS und AT bezeichnen wir mit u, v, w, und es ist klar, dass für die Fläche NMP der Werth von u, für PMQ der von v und für NMQ der von w unverändert bleibt; hieraus folgt dann, dass für die Schnittlinien dieser Flächen, also für MQ: v und w, für MN: w und u endlich, für MP: u und v constant sind. Demgemäss kann ein Fortschreiten auf einer dieser Linien durch ein Differentiiren be-

züglich nach u, v und w allein, oder nach Analogie des Vorigen durch die Zeichen d, d_1, d_2 angezeigt werden. Nehmen wir jetzt an, dass die drei Flächenschaaren einander orthogonal schneiden, so ergeben sich hieraus die Gleichungen:

$$d_1xd_2x + d_1yd_2y + d_1zd_2z = 0,$$
$$d_2xdx + d_2ydy + d_2zdz = 0,$$
$$dxd_1x + dyd_1y + dzd_1z = 0.$$

Differentiiren wir aber jede dieser Gleichungen, die erste nach Zeichen d, die zweite nach d_1, die dritte nach d_2, so ergiebt sich, wenn wir wieder unter Σ eine Summe von drei auf x, y, z bezüglichen Gliedern verstehen:

$$\Sigma d_1xdd_2x + \Sigma d_2xdd_1x = 0,$$
$$\Sigma d_2xdd_1x + \Sigma dxd_2d_1x = 0,$$
$$\Sigma dxd_1d_2x + \Sigma d_1xdd_2x = 0.$$

Die Differenz z. B. der beiden ersten Gleichungen aber giebt:

$$\Sigma d_1xdd_2x - \Sigma dxd_1d_2x = 0,$$

was nur mit der dritten verträglich ist, wenn:

$$\Sigma dxd_1d_2x = 0, \quad \Sigma d_1xdd_2x = 0,$$

also auch $\Sigma d_2xdd_1x = 0$ ist.

Nun stehen aber die drei Flächen aufeinander normal, und die Tangente der Schnittlinie von zweien derselben ist also Normale der dritten Fläche. Bezeichnet man also die Richtungscosinus dieser Normalen wieder mit λ, μ, ν, so sind diese Grössen etwa für Fläche NMQ den Grössen d_2x, d_2y, d_2z, die für Linie MP gelten, proportional, und man hat:

$$\lambda dd_1x + \mu dd_1y + \nu dd_1z = 0,$$

also diejenige Gleichung, welche in Verbindung mit der bereits angenommenen $dxd_1x + dyd_1y + dzd_1z = 0$ die Krümmungslinien definirt. Hiermit aber ist der Dupin'sche Satz bewiesen.

Ueber geradlinige Flächen.

§ 88.

Als geradlinige Flächen haben wir schon gelegentlich solche bezeichnet, in welchen sich durch jeden Punkt wenigstens eine Gerade legen lässt, d. h. solche, die man sich durch Bewegung einer Geraden entstanden denken kann.

Hierzu gehören alle Cylinder- und Kegelflächen, das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid. Wir werden jedoch

sehen, dass die beiden ersteren einer besondern Gruppe dieser Flächen angehören.

Zunächst jedoch suchen wir die allgemeine Gleichung der geradlinigen Flächen.

Die Gleichungen der Geraden, durch deren Bewegung die Fläche entstanden ist, die wir als Erzeugungslinie bezeichnen, seien in der Form gegeben: $z = ax + b$, $z = a_1 y + b_1$. Es müssen dann a, b, a_1, b_1 als Functionen irgend eines Parameters t gegeben sein. Durch Elimination von t entsteht dann die Gleichung unserer Fläche.

Offenbar kann dieser Parameter, den wir eliminiren, eine der Grössen a, b, a_1, b_1 selbst sein, und wir können somit die andern Constanten als Functionen von a ansehen. Somit können wir die allgemeinste Gleichung einer geradlinigen Fläche so schreiben:

$$\begin{cases} z = a \cdot x + F(a) \\ z = \varphi(a) \cdot y + f(a) \end{cases}.$$

Wollen wir die Gleichung dieser Fläche so darstellen, dass x, y, z als Functionen zweier unabhängigen Variablen gegeben sind, so gehen wir von folgender Gleichung der geraden Linie aus:

$$\frac{x - \xi}{a} = \frac{y - \eta}{b} = \frac{z - \zeta}{c} = v,$$

wo x, y, z die laufenden Coordinaten, ξ, η, ζ die eines gegebenen Punktes der Erzeugungslinie, und a, b, c die Cosinus der Winkel sind, welche die Linie mit den Axen macht, dann ist noch $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. v ist dann die Entfernung eines beliebigen Punktes (xyz) der Linie vom Punkte $(\xi\eta\zeta)$. Man hat dann:

$$x = \xi + av, \quad y = \eta + bv, \quad z = \zeta + cv.$$

Nimmt man nun ξ, η, ζ und a, b, c als Functionen einer Variablen u, so dass a, b, c nur der Bedingung unterworfen sind: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, und denkt sich v als zweite Variable, so stellen diese drei Gleichungen die geradlinige Fläche vor. Setzt man $v = 0$, so wird $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$. Diese Gleichungen, welche u enthalten, geben dann die Gleichung einer Curve, und zwar derjenigen, welche bei der Bewegung der Erzeugungslinie der Punkt $(\xi\eta\zeta)$ beschreibt. Wir wollen diese Curve, die also durch $v = 0$ bestimmt ist, Fundamentalcurve der geradlinigen Fläche nennen. Somit ist also auch v das Stück der Erzeugungslinie von einem beliebigen Punkte (xyz) bis zu dem zugehörigen $(\xi\eta\zeta)$ der Fundamentalcurve.

u gleich constant dagegen giebt die Gleichungen einer bestimmten Lage der Erzeugungslinie.

Uebrigens ist es nicht nöthig, dass a, b, c die Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ erfüllen. Tritt dies nicht ein, so sind eben a, b, c nur den angeführten Cosinus proportional, auch stellt in den Gleichungen $x = \xi + av$ u. s. w. v nicht die Entfernung der Punkte (xyz) und $(\xi\eta\zeta)$ vor.

Als Beispiel diene folgende Fläche:

$$x = \sqrt{p}\,\frac{u+v}{2}, \quad y = \sqrt{q}\,\frac{u-v}{2}, \quad z = \frac{uv}{2}.$$

Da sich für $v = 0$, $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ ergiebt, so ist:

$$\xi = \frac{u}{2}\sqrt{p}, \quad \eta = \frac{u}{2}\sqrt{q}, \quad \zeta = 0,$$

$$a = \frac{\sqrt{p}}{2}, \quad b = -\frac{\sqrt{q}}{2}, \quad c = \frac{u}{2},$$

und unsere Gleichungen nehmen die Formen an:

$$\frac{x-\xi}{\frac{\sqrt{p}}{2}} = \frac{y-\eta}{\frac{-\sqrt{q}}{2}} = \frac{z}{\frac{u}{2}} = v.$$

Die obigen Werthe von ξ, η, ζ geben die Fundamentalcurve, sie liegt also in der Ebene xy, und die Tangente ihres Winkels mit der x-Axe ist gleich $\sqrt{\frac{q}{p}}$.

Unsere Fläche entsteht, wenn man durch jeden Punkt dieser Curve eine Gerade legt, deren Winkel mit den Axen bezüglich die Cosinus haben:

$$\frac{\sqrt{p}}{2r}, \quad -\frac{\sqrt{q}}{2r}, \quad \frac{u}{2r},$$

wenn $r = \frac{1}{2}\sqrt{p + q + u^2}$ ist.

Sollen die Erzeugungslinien der Fläche bestimmt werden, so ist u allein als constant zu betrachten. Man erhält aber durch Elimination von v aus den gegebenen Gleichungen:

$$v = \frac{2x}{\sqrt{p}} - u = u - \frac{2y}{\sqrt{q}} = \frac{2z}{u},$$

also

$$1) \qquad u = \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}},$$

$$2) \qquad \frac{2z}{u} = \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}.$$

Beide Gleichungen drücken Ebenen aus, die Gleichung 1) aber eine Ebene, welche sich selbst parallel bleibt, wenn man u ändert. Also liegen alle Geraden der Fläche in parallelen Ebenen oder sind einer Ebene parallel. Man findet aber ebenso, wenn man u eliminirt:

3) $$v = \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}$$

und

4) $$\frac{2z}{v} = \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}};$$

das System der Curven $v =$ const. ist also ebenfalls eine Schaar von Geraden, die wegen der Gleichung 3) einer Ebene parallel ist. Auf der vorliegenden Fläche liegen also zwei Schaaren von Geraden, von denen jede Schaar einer Ebene parallel ist. Die Fläche ist ein hyperbolisches Paraboloid; seine Gleichung in der gewöhnlichen Form: $2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$, ergiebt sich durch Elimination von u aus 1) und 2).

§ 89.

Entwickeln wir jetzt die Gleichung der Tangentialebene in irgend einem Punkte der geradlinigen Fläche. Die allgemeine Gleichung der Tangentialebene ist

$$(X - x)A + (Y - y)B + (Z - z)C = 0$$

(§ 76 Schluss), wo X, Y, Z die laufenden Coordinaten, x, y, z die irgend eines Punktes der Fläche und A, B, C die in § 73 angegebenen Determinanten sind. Für die geradlinigen Flächen wird nun A oder

$$\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$= \left(\frac{d\eta}{du} + v\frac{db}{du}\right)c - b\left(\frac{d\zeta}{du} + v\frac{dc}{du}\right) = c\frac{d\eta}{du} - b\frac{d\zeta}{du} + v\left\{c\frac{db}{du} - b\frac{dc}{du}\right\},$$

oder wenn wir das Binom der beiden ersten Glieder mit l, den Factor von v mit l_1 bezeichnen, und m, m_1, n, n_1 die entsprechenden Grössen bei B und C sind, so ist

$$A = l + l_1 v, \quad B = m + m_1 v, \quad C = n + n_1 v.$$

Demnach wird unsere Gleichung folgende:

$$X(l + l_1 v) + Y(m + m_1 v) + Z(n + n_1 v)$$
$$= x(l + l_1 v) + y(m + m_1 v) + z(n + n_1 v)$$
$$= (\xi + av)(l + l_1 v) + (\eta + bv)(m + m_1 v) + (\zeta + cv)(n + n_1 v),$$

oder, wie man sich leicht überzeugt,

$$= \xi(l + l_1 v) + \eta(m + m_1 v) + \zeta(n + n_1 v).$$

Wir können also, wenn wir für l, l_1 u. s. w. ihre Werthe zurücksetzen und wenn wir die Differentiationen nach u durch Accente bezeichnen, die Gleichung der Tangentialebene so schreiben:

A) $$(X-\xi)\{c\eta'-b\zeta'+v(cb'-bc')\}$$
$$+(Y-\eta)\{a\zeta'-c\xi'+v(ac'-ca')\}$$
$$+(Z-\zeta)\{b\xi'-a\eta'+v(ba'-ab')\}=0.$$

Wir beantworten hiernach folgende Frage:

Welche Fläche bilden alle diejenigen Normalen, welche durch eine Erzeugungslinie gehen?

Die Gleichung der Normale, d. h. einer Geraden, die durch den Punkt (xyz) geht und auf der Tangentialebene normal steht, können wir mit Wiedereinführung der Grössen l, l_1 u. s. w. folgendermassen schreiben:

$$\frac{X-x}{l+l_1\cdot v}=\frac{Y-y}{m+m_1\cdot v}=\frac{Z-z}{n+n_1\cdot v}=w.$$

Für alle Punkte auf derselben Erzeugungslinie ist nur v verschieden, u bleibt dasselbe. Um daher den Ort aller Normalen zu finden, welche entlang dieser Erzeugungslinie gezogen werden können, muss man aus den Gleichungen der einen Normale v eliminiren. Wir schreiben sie zu dem Ende in folgender Gestalt:

$$X-x=lw+l_1vw,$$

oder, da $x=\xi+av$ ist,

$$X-\xi=av+lw+l_1v\cdot w,$$
$$Y-\eta=bv+mw+m_1v\cdot w,$$
$$Z-\zeta=cv+nw+n_1v\cdot w,$$

und haben somit drei Gleichungen, aus denen wir v und w eliminiren müssen. Es ist nun, wenn man die Gleichungen nach v, w und $v\cdot w$ auflöst:

$$\begin{vmatrix} a & l & l_1 \\ b & m & m_1 \\ c & n & n_1 \end{vmatrix} v = \begin{vmatrix} X-\xi & l & l_1 \\ Y-\eta & m & m_1 \\ Z-\zeta & n & n_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & l & l_1 \\ b & m & m_1 \\ c & n & n_1 \end{vmatrix} w = - \begin{vmatrix} X-\xi & a & l_1 \\ Y-\eta & b & m_1 \\ Z-\zeta & c & n_1 \end{vmatrix}$$

und
$$\begin{vmatrix} a & l & l_1 \\ b & m & m_1 \\ c & n & n_1 \end{vmatrix} v\cdot w = \begin{vmatrix} X-\xi & a & l \\ Y-\eta & b & m \\ Z-\zeta & c & n \end{vmatrix},$$

folglich, wenn man die ersten beiden Gleichungen mit einander, und die letzte mit dem Coefficienten, welchen $v\cdot w$ in ihr hat, multiplicirt, und alsdann die rechten Seiten wegen der Identität der linken einander gleich setzt:

$$\begin{vmatrix} X-\xi & l & l_1 \\ Y-\eta & m & m_1 \\ Z-\zeta & n & n_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X-\xi & a & l_1 \\ Y-\eta & b & m_1 \\ Z-\zeta & c & n_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X-\xi & a & l \\ Y-\eta & b & m \\ Z-\zeta & c & n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & l & l_1 \\ b & m & m_1 \\ c & n & n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine Gleichung zweiten Grades in Bezug auf $X - \xi$, $Y - \eta$, $Z - \zeta$. Wir haben somit folgenden Satz gefunden: Wenn man in einer geradlinigen Fläche entlang einer geraden Linie der Fläche ihre Normalen zieht, so bilden sie eine Fläche zweiten Grades, welche, weil alle Normalen auf einer Geraden senkrecht stehen, also der darauf senkrechten Ebene parallel sind, ein hyperbolisches Paraboloid ist.

§ 90.

Es soll noch an einem Beispiele gezeigt werden, wie eine Fläche durch Bewegung einer Geraden entsteht. Wir wählen folgende Aufgabe: Eine gerade Linie soll so geführt werden, dass sie immer durch drei feste nicht zu zweien in einer Ebene liegende Gerade geht.

Um diese Betrachtung möglichst einfach zu gestalten, sei die eine der drei festen Geraden die x-Axe, ihre kürzeste Entfernung von der zweiten, also die beiden gemeinschaftliche rechtwinklige Linie die z-Axe, die zweite also der xy-Ebene parallel. Dann sind bezüglich die Gleichungen der drei festen Linien:

$$1)\quad y = 0,\quad z = 0,\qquad 2)\quad y = gx,\quad z = h,$$
$$3)\quad y = kx + l,\quad z = mx + n;$$

die Coefficienten sind alle gegebene Constanten.

Seien jetzt die Gleichungen der Erzeugungslinie:

$$z = ax + b = cy.$$

Der zweite Werth von z enthält nämlich kein constantes Glied, weil für den Schnittpunkt mit der ersten Linie z und y gleichzeitig verschwinden. Für den Schnittpunkt mit der zweiten Linie sei nun $x = x_0$ und wir haben:

$$h = ax_0 + b = cgx_0,$$

also nach Elimination von x_0: $ah = cg(h - b)$. Aus der Gleichung der Erzeugungslinie kann man mittelst dieser Gleichung etwa b wegschaffen, und erhält: $\frac{h(cg - a)}{cg} = b$, so dass die Gleichungen der Erzeugungslinie sich nun schreiben:

$$\text{I)}\qquad z = cy,\quad z = ax + h - \frac{a}{c}p,$$

wenn wir $\frac{h}{g} = p$ setzen. Für den Schnittpunkt der Erzeugungslinie mit der dritten Linie geben die Gleichungen 3) und I), wenn wir x, y, z eliminiren:

$$c(m - a)(cl - n) = (m - ck)(ch - cn - ap),$$

oder:

$$\text{II)}\quad c^2(hk - kn + ml - al) + c(an - apk - hm) + map = 0.$$

Aus den Gleichungen I) und II) ist nun a und c zu eliminiren, um die Gleichung der geradlinigen Fläche zu erhalten; I) aber giebt $c = \frac{z}{y}$ und $a = \frac{z(z-h)}{xz - py}$. Es wird also Gleichung II), wenn man nach Einsetzen dieser Werthe von y und z den Factor z^2 weghebt:

$$mpy^2 - lz^2 + (hk + ml - kn)xz - hmxy + yz(n - pk)$$
$$- y(pml - pkn - hpk) + hl = 0.$$

Dies ist eine Fläche zweiten Grades, und zwar ein einschaliges Hyperboloid, da weder ein zweischaliges noch ein Ellipsoid gerade Linien einhüllen können, die Gleichung aber mehr willkürliche Constanten enthält, als dem Paraboloid zukommen.

Abwickelbare Flächen.

§ 91.

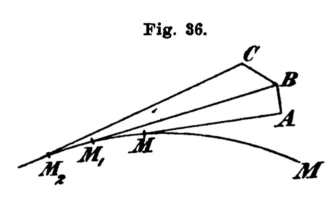
Unter abwickelbaren Flächen verstanden wir diejenigen geradlinigen Flächen, worin je zwei aufeinander folgende Geraden in einer Ebene liegen. Sind diese sämmtlichen Geraden einander parallel, so haben wir einen allgemeinen Cylinder; gehen sie alle durch denselben Punkt, so bilden sie einen Kegel; schneiden sich aber je zwei aufeinander folgende in verschiedenen Punkten, was der allgemeinste Fall ist, so wird die Reihe dieser continuirlich aufeinander folgenden Punkte eine Curve doppelter Krümmung bilden, deren Tangenten die Erzeugungslinien sind und welche man Wendungskante oder Wendungscurve (arrête de rebroussement) nennt, während jede der Geraden, welche die Fläche bilden, Erzeugungslinie genannt wird. Der Name „abwickelbare Fläche“ kommt daher, dass, wenn man die Ebene je zweier aufeinander folgenden Geraden mittelst einer unendlich kleinen Drehung um ihre Erzeugungslinie in diejenige Ebene bringt, welche die letztere mit der vorhergehenden Erzeugungslinie macht und so mit der nächstfolgenden Ebene fortfährt, schliesslich eine einzige Ebene entsteht, in welcher sämmtliche Erzeugungslinien die Schaar der Tangenten der somit in eine ebene Curve verwandelten Wendungskante bilden. Hiernach kann man sich jede abwickelbare Fläche auch entstanden denken durch die Schaar der Tangenten irgend einer Curve doppelter Krümmung.

Offenbar bilden auch sämmtliche Tangentialebenen einer Fläche, welche dieselbe in einer gegebenen Curve berühren, eine abwickelbare Fläche, deren Erzeugungslinien die conjugirten Tangenten der Tangenten sind, welche die gegebene Curve berühren, denn je zwei aufeinander folgende dieser conjugirten Tangenten liegen in einer Ebene.

Im Falle, dass diese gegebene Curve eine Krümmungslinie ist, haben wir nun gefunden, dass ihre Tangenten die conjugirten Tangenten, also die Erzeugungslinien, dieselbe rechtwinklig schneiden. Wird nun die abwickelbare Fläche in der oben beschriebenen Weise in eine Ebene verwandelt, so hört der Winkel zwischen den Erzeugungslinien, also den Tangenten der Wendungskante mit denen der gegebenen jetzt ebenen Curve nicht auf ein rechter zu sein, also die letztere wird die Evolvente der Wendungskante. Dasselbe findet noch bei einer andern Art der abwickelbaren Flächen statt, bei denjenigen nämlich, welche die durch eine Krümmungslinie gehenden Normalen einer Fläche bilden, von denen ja gezeigt wurde, dass je zwei aufeinander folgende in einer Ebene liegen. Da auch diese auf der Krümmungslinie senkrecht stehen, so wird letztere beim Abwickeln die Evolvente der Wendungskante. (Auch in der ursprünglichen Lage beider Curven haben wir bereits die letztere als Evolute der Krümmungslinie bezeichnet.)

Diese Betrachtung giebt nun Veranlassung, den Begriff der Evolvente auch auf Curven doppelter Krümmung zu übertragen. Wir bezeichnen nämlich als Evolvente einer solchen diejenige Curve, welche die Tangenten der gegebenen Curve rechtwinklig schneiden. Man kann die Evolvente doppelt gekrümmter Curven eben so wie die der Ebene entstanden denken, indem man von einer Tangente, die in M berührt, ein beliebiges Stück AM abschneidet (Fig. 36) und dies in der Krümmungsebene so um den Berührungspunkt M dreht, dass sie in die Richtung der benachbarten Tangente, der Punkt A aber in B fällt, dann das so abgeschnittene Stück M_1B der letzteren so um den Berührungspunkt M_1 dreht, bis sie in die nächstfolgende Tangente fällt u. s. w. Offenbar, da AM beliebig, hat jede Curve wie die ebenen unendlich viel Evolventen.

Fig. 36.



Hiernach also ist jede Krümmungslinie Evolvente sowohl derjenigen Curve, welche von den Schnittpunkten je zweier nächsten ihren Tangenten conjugirten Tangenten gebildet wird, als auch derjenigen Curve, welche die Schnittpunkte der durch sie gehenden Normalen bilden, und die wir bereits als Evolute der Krümmungslinie bezeichnet haben.

Kehren wir jetzt nochmals zu den allgemeinen abwickelbaren Flächen zurück, so kann man eine solche auch sich so entstanden denken, dass eine Ebene sich nach einem gewissen Gesetze bewegt, also etwa so, dass dieselbe immer zwei Curven, die nicht beide in derselben

Ebene liegen, berührt. In jedem Falle wird die bewegte Ebene in jeder Lage eine Tangentialebene der abwickelbaren Fläche sein, oder dieselbe einhüllen.

§ 92.

Wir stellen jetzt folgende Frage:

Bei welchen geradlinigen Flächen liegen die durch eine der Erzeugungslinie gehenden Normalen in einer Ebene?

Zunächst ist klar, dass diese Normalen einander parallel sein müssen, da sie in einer Ebene liegen, und auf einer Geraden, der Erzeugungslinie, senkrecht stehen. Somit steht auch jede Tangentialebene, die durch diese Erzeugungslinie geht, auf einer beliebigen dieser Normalen senkrecht, d. h. alle diese Tangentialebenen fallen zusammen, bilden also eine einzige Ebene, durch deren Bewegung die geradlinige Fläche entstanden ist, sie muss also eine abwickelbare Fläche sein.

Hiernach sind auch sehr leicht die Krümmungslinien der abwickelbaren Flächen zu bestimmen.

Da die Normalen in den Erzeugungslinien in eine Ebene fallen, so bilden diese Erzeugungslinien das eine System der Krümmungslinien. Das zweite bilden die auf denselben lothrechten Curven, d. h. die Evolventen der Wendungskante.

Es soll aber die eben gefundene Definitionseigenschaft der abwickelbaren Flächen noch durch Rechnung, die allerdings bedeutend verwickelter ist, nachgewiesen werden.

Alle Punkte einer Erzeugungslinie (§ 88) einer beliebigen geradlinigen Fläche haben die Gleichung $u = \text{const.}$, also die Grössen $\xi, \eta, \zeta, a, b, c$ gemeinschaftlich, unterscheiden sich also nur durch den Werth des v. Sollen daher alle Punkte einer Geraden dieselbe Tangentialebene haben, so muss aus der Gleichung der Tangentialebene v herausfallen.

Dies ist **erstens** dadurch möglich, dass die Coefficienten des v in der Gleichung des § 89 A) verschwinden:

$$cb' - bc' = 0, \quad ca' - ac' = 0, \quad ab' - ba' = 0,$$

oder
$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{a'}{a},$$

wie man die Gleichungen schreiben kann, wenn a, b, c von Null verschieden sind. Sie sind irgendwelche bestimmte Functionen von u. Setzen wir daher die drei gleichen Brüche gleich U, so erhält man durch Integration der dadurch entstehenden drei Gleichungen:

$$\frac{da}{a} = \frac{db}{b} = \frac{dc}{c} = U, \quad la = \int U du + lC,$$

oder $\quad a = C \cdot e^{\int U du}$, ebenso $b = C_1 \cdot e^{\int U du}$, $c = C_2 \cdot e^{\int U du}$,
wo C eine beliebige Constante ist.

Da aber $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ist, wenn man (§ 88) unter a, b, c die Richtungscosinus der Erzeugungslinie versteht, so ist:

$$(C^2 + C_1^2 + C_2^2) e^{2\int U du} = 1 \quad \text{oder} \quad e^{\int U du} = \frac{1}{\sqrt{C^2 + C_1^2 + C_2^2}},$$

also constant; somit haben in diesem Falle a, b, c constante Werthe, d. h. alle erzeugenden Geraden der Fläche bilden mit den Axen denselben Winkel, oder sind einander parallel. Die geradlinige Fläche ist also eine **Cylinderfläche**, denn diese entsteht, wenn man durch eine Curve eine Reihe paralleler Geraden zieht.

Ist dagegen einer der Cosinus, z. B. $b = 0$, so werden zwei der obigen drei Coefficienten von selbst Null, der dritte, hier $ca' - ac' = 0$ gesetzt, giebt wie oben integrirt:

$$a = C \cdot e^{\int U du}, \quad b = 0, \quad c = C_2 \cdot e^{\int U du};$$

die Betrachtung ist also dieselbe wie vorhin, nur dass die Constante $C_1 = 0$ ist; es ergiebt sich also wiederum die Cylinderfläche.

Sind zwei der Cosinus z. B. $b = 0$ und $a = 0$, so wird $c = 1$; es sind also dann alle Geraden parallel der z-Axe und erzeugen somit wiederum eine Cylinderfläche.

Wenn also die Coefficienten, welche v in der Gleichung der Tangentialebene hat, einzeln Null sind, so ergiebt sich auf jeden Fall eine Cylinderfläche.

Zweitens fällt aber auch v fort, wenn ξ, η und ζ constant sind, denn dann fallen aus der Gleichung A) des § 89 die Grössen ξ', η', ζ', die gleich Null sind, weg, und die Gleichung ist durch v theilbar. In diesem Falle schrumpft die Fundamentalcurve zu dem Punkte zusammen, welcher durch die Werthe von ξ, η, ζ bestimmt wird. Die entstehende Fläche ist eine Kegelfläche, welche wie bekannt die in Frage stehende Eigenschaft mit der Cylinderfläche theilt.

Schliessen wir diese Flächen aus, so ist es, wenn wir jetzt die Gleichung der Tangentialebene so schreiben:

$$(X - \xi)(cb' - bc') \left\{ v + \frac{c\eta' - b\zeta'}{cb' - bc'} \right\}$$
$$+ (Y - \eta)(ac' - ca') \left\{ v + \frac{a\zeta' - c\xi'}{ac' - ca'} \right\}$$
$$+ (Z - \zeta)(ba' - ab') \left\{ v + \frac{b\xi' - a\eta'}{ba' - ab'} \right\} = 0$$

drittens nur möglich, dass die Grösse v wegfällt, wenn die drei Klammergrössen einander gleich sind oder wenn

$$\frac{c\eta' - b\zeta'}{cb' - bc'} = \frac{a\zeta' - c\xi'}{ac' - ca'} = \frac{b\xi' - a\eta'}{ba' - ab'}$$

ist. Sind nun, wie wir voraussetzen, die Nenner dieser Brüche von Null verschieden, so kann man jedesmal zwei Grössen e und f finden, so dass $\xi' = ea + fa'$, $\eta' = eb + fb'$, denn um diese Gleichungen aufzulösen, ist nur die Bedingung erforderlich, dass $ab' - ba'$ von Null verschieden sei. e und f werden Functionen von u sein. Durch diese Substitution wird der dritte Bruch $= f$; man hat also die Gleichung

$$\frac{c\eta' - b\zeta'}{cb' - bc'} = f \text{ oder } b\zeta' = -f(cb' - bc') + c\eta' = bec + f(cb' - cb' + bc'),$$

also $\zeta' = ec + fc'$. Es lassen sich also stets zwei Grössen e und f finden, so dass ξ', η', ζ' ausgedrückt werden durch die Gleichungen:

$$\xi' = ea + fa', \quad \eta' = eb + fb', \quad \zeta' = ec + fc',$$

und dies ist die Bedingung, damit die Tangentialebene für alle Punkte einer erzeugenden Linie der Fläche unverändert bleibt. Dieselbe lautet, wenn man e und f eliminirt:

$$\xi'(bc' - cb') + \eta'(ca' - ac') + \zeta'(ab' - ba') = 0.$$

Diese Bedingung hat aber auch einen geometrischen Sinn. Um sie zu interpretiren, setzen wir für den Augenblick

$$\xi - f \cdot a = \alpha, \quad \eta - f \cdot b = \beta, \quad \zeta - f \cdot c = \gamma.$$

Dann sind α, β, γ die Coordinaten eines Punktes, der offenbar der Gleichung genügt:

$$\frac{x - \xi}{a} = \frac{y - \eta}{b} = \frac{z - \zeta}{c}.$$

Denn setzt man α für x u. s. w., so wird die Gleichung befriedigt. Alle Punkte α, β, γ liegen somit auf der geradlinigen Fläche. Bestimmen wir die Tangente der Curve, deren Coordinaten α, β, γ sind, so hat sie die Gleichung

$$\frac{X - \alpha}{\frac{d\alpha}{du}} = \frac{Y - \beta}{\frac{d\beta}{du}} = \frac{Z - \gamma}{\frac{d\gamma}{du}}.$$

Es ist aber

$$\frac{d\alpha}{du} = \xi' - fa' - f'a = ea - f'a = (e - f')a, \quad \frac{d\beta}{du} = (e - f')b,$$
$$\frac{\partial\gamma}{du} = (e - f')c,$$

also, wenn man diese Werthe und die für α, β, γ selber in die Glei-

chung der Tangente substituirt und zugleich mit $e - f'$ die Gleichung multiplicirt:

$$\frac{X-\xi+fa}{a} \text{ oder } \frac{X-\xi}{a}+f=\frac{Y-\eta}{b}+f=\frac{Z-\zeta}{c}+f$$

oder:

$$\frac{X-\xi}{a}=\frac{Y-\eta}{b}=\frac{Z-\zeta}{c}.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Erzeugungslinie. Wir haben also den Satz gefunden, dass in diesem Falle sämmtliche geraden Linien der Fläche Tangenten an eine Curve sind, die auf ihr liegt. Es ist dies aber eine der Definitionseigenschaften der abwickelbaren Fläche. Die Curve, zu welcher sämmtliche Erzeugungslinien Tangenten sind, wurde schon oben als Wendungskante bezeichnet.

§ 93.

Zum Verständniss des Folgenden bemerken wir: Es war öfter die Rede von Linien die sich schneiden oder nicht schneiden, die aber in jedem Falle einen unendlich kleinen Winkel mit einander bilden, ebenso von unendlich kleinen aber als eben betrachteten Flächen u. s. w.

Dies ist nun, wie allerdings eigentlich selbstverständlich, so aufzufassen: Wenn sich aus irgend einer Rechnung etwa ergiebt, dass zwei endliche Linien einen unendlich kleinen Winkel mit einander bilden, so werden wir sie als zusammenfallend bezüglich parallel betrachten, so lange nur endliche Grössen in Betracht kommen, und allgemein: gegen endliche Grössen verschwinden die unendlich kleinen. Berechnet man aber Grössen, die z. B. in unserem Falle unendlich klein von der Ordnung wie der betrachtete Winkel sind, so wird man diese Linien als von einander getrennt ansehen müssen, und ihr Zusammenfallen bezüglich ihre Parallelität ist nur anzunehmen, wenn dieser Winkel unendlich klein von höherer Ordnung als der betrachteten Grössen ist. Auch ist solches bei unseren Untersuchungen immer ersichtlich.

Das Ergebniss unserer Betrachtungen also ist, dass man bei allen Untersuchungen mit unendlich kleinen Grössen Rücksicht zu nehmen hat auf die Ordnung der Grössen, welche schliesslich sich ergeben. Es darf also z. B. nicht während der Rechnung eine Grösse zweiter Ordnung gegen eine solche erster Ordnung vernachlässigt werden, wenn man nicht übersieht, dass der in der Schlussformel aus der Grösse zweiter Ordnung sich ergebende Theil unendlich klein gegen den übrigen Theil der Schlussformel ist. Bei dem Folgenden ist von dieser Betrachtung ausgegangen.

Wir lösen jetzt folgende Aufgabe:

Es sei ein System continuirlich aufeinander folgender Geraden gegeben. Die Gleichungen einer solchen schreiben wir:

$$\frac{x-\xi}{a}=\frac{y-\eta}{b}=\frac{z-\zeta}{c},$$

wo $\xi, \eta, \zeta, a, b, c$ Functionen einer Variablen u sein sollen. Wir erhalten dann die Gleichungen einer andern Linie des Systems, wenn wir für u: $u+\Delta u$, für ξ: $\xi+\Delta\xi$, für a: $a+\Delta a$ u. s. w. schreiben, sodass diese Gleichungen lauten:

$$\frac{x-\xi-\Delta\xi}{a+\Delta a}=\frac{y-\eta-\Delta\eta}{b+\Delta b}=\frac{z-\zeta-\Delta\zeta}{c+\Delta c}.$$

Legen wir durch die erste Linie eine Ebene, so wird deren Gleichung sein: $\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)=0$. Man hat also, da die gegebene Linie in dieser Ebene liegt,

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=0.$$

Legt man nun aber durch die zweite Linie ebenfalls eine Ebene, welche der ersteren parallel ist, was ja immer möglich ist für eine bestimmte Lage dieser Ebenen, so hat man in gleicher Weise, da α, β, γ für beide Ebenen identisch sind:

$$\alpha(a+\Delta a)+\beta(b+\Delta b)+\gamma(c+\Delta c)=0,$$

also auch:

$$\alpha\Delta a+\beta\Delta b+\gamma\Delta c=0.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen die Verhältnisse:

$$\alpha:\beta:\gamma=b\Delta c-c\Delta b:c\Delta a-a\Delta c:a\Delta b-b\Delta c.$$

Da aber von α, β, γ nur die Verhältnisse bestimmt sind, sie also einen willkürlichen gemeinschaftlichen Factor enthalten, so bestimmen wir diesen, indem wir setzen:

$$\alpha=b\Delta c-c\Delta b,$$

dann ist auch:

$$\beta=c\Delta a-a\Delta c,\quad \gamma=a\Delta b-b\Delta a.$$

Diese Werthe setzen wir für α, β, γ in die Gleichungen beider Ebenen, welche lauten:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha\xi+\beta y+\gamma\zeta,$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha(\xi+\Delta\xi)+\beta(\eta+\Delta y)+\gamma(z+\Delta z).$$

Ist nun die Gleichung irgend einer Ebene: $Ax+By+Cz=p$ und sind A, B, C die Richtungscosinus des Lothes auf dieser Ebene, so ist p die Entfernung der Ebene vom Anfangspunkte. Diese Grösse p ist nun für unsere Ebene bezüglich gleich der rechten Seite der entsprechenden Gleichung dividirt durch $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$. Die Differenz

beider so gefundenen Ausdrücke aber giebt die Entfernung beider Ebenen von einander, und diese Entfernung ist also:

$$p = \frac{\alpha \Delta\xi + \beta \Delta\eta + \gamma \Delta\zeta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}},$$

und dies ist zugleich die kürzeste Entfernung der beiden gegebenen Linien. Wir haben demnach folgenden Ausdruck:

$$p = \frac{(b \cdot \Delta c - c \cdot \Delta b)\Delta\xi + (c \cdot \Delta a - a \cdot \Delta c)\Delta\eta + (a \cdot \Delta b - b \cdot \Delta a)\Delta\zeta}{\sqrt{(b \cdot \Delta c - c \cdot \Delta b)^2 + (c \cdot \Delta a - a \cdot \Delta c)^2 + (a \cdot \Delta b - b \cdot \Delta a)^2}}. —$$

Denken wir uns nun, dass Δu immer kleiner wird, so wird offenbar p zugleich kleiner, und zwar bleibt p im Allgemeinen von derselben Ordnung wie Δu. Man kann nun die Frage aufwerfen: In welchem Falle ist die kürzeste Entfernung der beiden auf einander folgenden geraden Linien nicht ein unendlich Kleines der ersten Ordnung, sondern einer höheren Ordnung? Wir setzen zu dem Ende $\Delta u = h$ und denken uns die Zuwüchse von a, b u. s. w. nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickelt. Dann wird

$$b \cdot \Delta c - c \cdot \Delta b = h(bc' - cb') + \frac{h^2}{2}(bc'' - cb'') + \cdots,$$

also der Nenner des Ausdrucks für p:

$$h \cdot \sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2 + h\{\cdots\cdots\} + \cdots}.$$

Der Nenner bleibt somit stets positiv und von Null verschieden; wir können ihn also bezeichnen durch $h \cdot N$, wo N eine endliche Grösse ist. Der Zähler von p wird von der zweiten Ordnung:

$$h^2\{\xi'(bc' - cb') + \eta'(ca' - ac') + \zeta'(ab' - ba')\}$$
$$+ \frac{h^3}{2}\{\xi''(bc' - cb') + \xi'(bc'' - cb'') + \cdots\cdots\} + \cdots.$$

Also wird

$$p = \frac{h}{N}\{\xi'(bc' - cb') + \cdots\}$$
$$+ \frac{h^2}{2N}\{\xi''(bc' - cb') + \xi'(bc'' - cb'') + \cdots\cdots\} + \cdots.$$

Dieser Ausdruck kann nur dadurch ein unendlich Kleines einer höhern als der ersten Ordnnng werden, dass der Coefficient von $\frac{h}{N}$ Null wird. Es muss also, damit dies geschehe,

$$\xi'(bc' - cb') + \eta'(ca' - ac') + \zeta'(ab' - ba') = 0$$

sein, wodurch zugleich die Glieder zweiter Ordnung verschwinden, da der Coefficient von $\frac{h^2}{2N}$ der genaue Differentialquotient des Coefficienten von $\frac{h}{N}$ ist. Diese Bedingungsgleichung ist aber identisch mit

der des § 92, welche die Bedingung angiebt, dass die Tangentialebene entlang einer geraden Linie der Fläche sich nicht ändert. Wir haben somit den Lehrsatz gewonnen:

Die Bedingung, damit zwei Gerade eines Systems, welche einander unmittelbar folgen, eine Entfernung haben, welche gegen ein unendlich Kleines erster Ordnung verschwindet, stimmt ganz überein mit der Bedingung, dass die Tangentialebene der Fläche, welche von allen Geraden gebildet wird, entlang einer Geraden der Fläche ungeändert bleibt. In diesem Falle aber ist diese Entfernung sogar unendlich klein von der dritten Ordnung. So also ist es zu verstehen, dass zwei Erzeugende einer abwickelbaren Fläche einen Punkt gemein haben, nämlich wenn man Grössen von höherer als zweiter Ordnung vernachlässigt. Ein kürzerer Beweis ist der folgende.

Man habe die Gleichung einer Geraden:

$$\frac{x-\xi}{a}=\frac{y-\eta}{b}=\frac{z-\zeta}{c}$$

und die der unendlich nahen mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung:

$$\frac{x-\xi-d\xi}{a+da}=\frac{y-\eta-d\eta}{b+db}=\frac{z-\zeta-d\zeta}{c+dc},$$

wo $d\xi=\frac{d\xi}{du}\cdot du$ u. s. w. ist. Die drei ersten gleichen Brüche wollen wir $=\varepsilon$, die andern drei $=\varkappa$ setzen. Die beiden Geraden haben nun einen Punkt gemein, wenn die Grössen x, y, z resp. in beiden Gleichungen einzeln gleich sind, d. h. wenn man x aus den Gleichungen $x-\xi=a\varepsilon$, $x-\xi-d\xi=\varkappa a+\varkappa da$ eliminiren darf und ebenso die beiden andern. Man erhält dadurch $d\xi+\varkappa a+\varkappa da=\varepsilon a$ oder wenn man $\varkappa-\varepsilon=\lambda$ setzt:

$$d\xi+\lambda a+\varkappa da=0$$

und ebenso

$$d\eta+\lambda b+\varkappa db=0,\quad d\zeta+\lambda c+\varkappa dc=0.$$

Eliminirt man also λ und $\varkappa$ und dividirt noch die entstehende Gleichung mit $du\cdot du$, so findet man als die gesuchte Bedingung wie oben

$$\xi'(bc'-cb')+\eta'(ca'-ac')+\zeta'(ab'-ba')=0.$$

§ 94.

Gehen wir jetzt von der Definition aus, wonach eine abwickelbare Fläche durch Bewegung einer Ebene entsteht. Die Gleichung dieser Ebene sei $z=l\cdot x+m\cdot y+n$, wo l, m, n Functionen eines Parameters h sind, welchem wir nach und nach alle möglichen Werthe beilegen, um die Fläche zu finden, die von diesen so be-

stimmten Ebenen herrühren wird. Die Gleichung der nächstfolgenden Ebene ist dann:

$$z = (l + dl)x + (m + dm)y + n + dn,$$

also hat man für den Durchschnitt beider Ebenen die Gleichungen:

$$\begin{cases} 0 = z - lx - my - n, \\ 0 = \frac{dl}{dh} x + \frac{dm}{dh} y + \frac{dn}{dh}. \end{cases}$$

Sie geben die Gerade an, welche der Durchschnitt der beiden Ebenen ist, und in ihren verschiedenen Lagen von den verschiedenen Werthen des h abhängt. Eliminirt man also die Grösse h aus beiden Gleichungen, so erhält man die allgemeinste Gleichung einer abwickelbaren Fläche. Denkt man sich h aus der zweiten Gleichung ausgedrückt als Function von x und y und diesen Werth $h = \varphi(x, y)$ in die erste Gleichung eingesetzt, so bekommt man eine Gleichung von der Form $z = F(x, y)$.

Sehr leicht kann man die partielle Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen aufstellen. Da die beiden Gleichungen derselben nämlich die vier Variabeln x, y, z, h enthalten, so kann man z und h als Functionen von x und y betrachten. Differentiiren wir demgemäss die Gleichung $z = lx + my + n$ nach x und y, so erhalten wir:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = l + \left(\frac{dl}{dh} x + \frac{dm}{dh} y + \frac{dn}{dh}\right) \frac{\partial h}{\partial x},$$

oder, da der Ausdruck in der Klammer Null war, $\frac{\partial z}{\partial x} = l$, ebenso $\frac{\partial z}{\partial y} = m$, oder $p = l$, $q = m$. Die Grössen l und m sind beides Functionen von h.

Eliminirt man aus den Gleichungen $p = l$, $q = m$ also h, so erhält man eine Gleichung $p = f(q)$. Diese differentiiren wir einmal nach x und einmal nach y, und erhalten $r = f'(q) \cdot s$, $s = f'(q) \cdot t$, also durch Elimination von $f'(q)$ die schon gefundene Gleichung der abwickelbaren Flächen $rt - s^2 = 0$.

§ 95.

Es wurde oben gezeigt, dass die conjugirten Tangenten einer Krümmungslinie auf derselben senkrecht stehen. Dies soll auch aus der Theorie der abwickelbaren Flächen bewiesen werden. Wir stellen zu dem Ende die Frage:

Giebt es Curven auf einer Fläche, die die Eigenschaft haben, dass, wenn man durch dieselben eine umhüllende abwickelbare Fläche legt, die Erzeugungslinien der letz-

teren, die ja auch Tangenten der Fläche sind, zu den Tangenten der Curve normal stehen?

Es sei $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche, (x, y, z) ein Punkt derselben, und durch ihn eine Curve auf der Fläche gezogen. Wir nehmen zu dem ersten Punkte auf derselben Curve einen unendlich nahen Punkt $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Dann ist die Tangentialebene im ersten Punkte, wenn wir die Beziehungen des § 56 anwenden:

$$1) \qquad (\xi - x)P + (\eta - y)Q + (\zeta - z)R = 0.$$

Die in dem unendlich nahen Punkte wird

$$(\xi - x - dx)(P + dP) + (\eta - y - dy)(Q + dQ) + (\zeta - z - dz)(R + dR) = 0$$

oder

$$(\xi - x)P + (\eta - y)Q + (\zeta - z)R - (Pdx + Qdy + Rdz) + (\xi - x)dP + (\eta - y)dQ + (\zeta - z)dR - (dPdx + dQdy + dRdz) = 0.$$

Zur Bestimmung der Durchschnittslinie beider Tangentialebenen subtrahiren wir von dieser die Gleichung 1) und berücksichtigen, dass $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, sowie dass man die Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen darf. Also:

$$2) \qquad (\xi - x)dP + (\eta - y)dQ + (\zeta - z)dR = 0.$$

Die Gleichungen 1) und 2) geben dann:

$$\frac{\xi - x}{QdR - RdQ} = \frac{\eta - y}{RdP - PdR} = \frac{\zeta - z}{PdQ - QdP}.$$

Dies ist eine Erzeugungslinie der abwickelbaren Fläche. Dieselbe steht aber normal zu der Tangente der Curve, deren Gleichung

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}$$

ist, wenn

$$dx(QdR - RdQ) + dy(RdP - PdR) + dz(PdQ - QdP) = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiten Grades erster Ordnung und keine andere als die Differentialgleichung der Krümmungscurven (§ 64) in veränderter Ordnung der Glieder und wenn man α, β, γ durch dx, dy, dz ersetzt. Wir haben somit den schon bewiesenen Satz:

Die Krümmungscurven einer Fläche haben die Eigenschaft, dass, wenn man eine abwickelbare Fläche entlang einer solchen legt, so dass die gegebene Fläche von der abwickelbaren umhüllt wird, die Erzeugungslinien der abwickelbaren Fläche normal zu den Tangenten der Krümmungscurve stehen. Und zwar ist dies eine Eigenschaft, die den Krümmungscurven ausschliesslich zukommt.

Bei den Rotationsflächen sind die Krümmungscurven Meridian und Parallelkreis. Die abwickelbare Fläche um den Meridian wird ein Cylinder, die um den Parallelkreis ein Kegel. Jede Erzeugungslinie dieser beiden Flächen steht normal zu der entsprechenden Tangente der Krümmungscurven.

§ 96.

Eine andere Haupteigenschaft der Krümmungscurven war, dass die durch eine solche gehenden Normalen eine abwickelbare Fläche bilden. Um auch dies ähnlich wie die vorige Eigenschaft zu zeigen, denke man sich irgend eine Curve auf der Fläche, und entlang derselben die Normalen der Fläche gezogen, wodurch man eine allgemeine geradlinige Fläche erhält. Untersucht man nun diejenigen Curven auf der gegebenen Fläche, welche die Eigenschaft haben, dass die Normalen entlang diesen Curven eine abwickelbare Oberfläche bilden oder in zwei unendlich nahen Punkten der Curve die Normalen der Fläche sich treffen, so findet man wiederum die Krümmungscurven. Denn die Gleichungen der Normale sind

$$\frac{\xi - x}{P} = \frac{\eta - y}{Q} = \frac{\zeta - z}{R} = \lambda .$$

Alsdann sind die Gleichungen der unendlich nahen Normale

$$\frac{\xi - x - dx}{P + dP} = \frac{\eta - y - dy}{Q + dQ} = \frac{\zeta - z - dz}{R + dR} = \lambda + \mu .$$

Es ist also die Frage: wann haben diese beiden Geraden einen Punkt gemein? Schreiben wir die Gleichungen der Normalen so:

$$\begin{cases} \xi - x = \lambda P, \\ \eta - y = \lambda Q, \\ \zeta - z = \lambda R, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi - x = dx + (\lambda + \mu)(P + dP), \\ \eta - y = dy + (\lambda + \mu)(Q + dQ), \\ \zeta - z = dz + (\lambda + \mu)(R + dR), \end{cases}$$

so haben wir hieraus ausser λ und μ auch ξ, η, ζ zu eliminiren. Bezeichnen wir $\lambda + \mu$ durch ν, so erhalten wir dadurch folgendes System von drei Gleichungen:

$$\begin{cases} 0 = dx + \mu P + \nu \cdot dP, \\ 0 = dy + \mu Q + \nu \cdot dQ, \\ 0 = dz + \mu R + \nu \cdot dR, \end{cases}$$

und dies sind mit anderer Bezeichnung der constanten Factoren dieselben Gleichungen, welche wir oben (§ 64) für die Krümmungscurven gefunden haben. Es sind dies nämlich die Gleichungen:

$$S\alpha + \varrho \frac{dP}{ds} - P\varrho \frac{dS}{Sds} = 0 \quad \text{u. s. w.,}$$

wo $\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\varrho = \nu$, $-\varrho \frac{dS}{S\,ds} = \mu$ zu setzen ist. Sie gehen über in die Endform nur einer Gleichung, wenn man μ und ν noch eliminirt.

Dass diese jetzt erwiesene Eigenschaft der Krümmungscurven eigentlich keine andere ist als die vorige, sieht man durch eine ganz elementare Betrachtung.

Sei S der Durchschnitt zweier Ebenen A und B, EF eine Gerade in Ebene A, die S in F schneidet. Ziehen wir in E ein Loth auf A, in F eins auf B, so werden sich diese Lothe dann schneiden, wenn EF auf S senkrecht steht, da ja auch beide Lothe auf S senkrecht stehen. Denkt man sich also unter den beiden Ebenen zwei aufeinander folgende Tangentialebenen der Fläche, welche in E und F die Fläche berühren, so wird der Durchschnitt S eine Erzeugungslinie der abwickelbaren Oberfläche sein. $\overline{EF}$ ist alsdann eine Tangente der fraglichen Curve auf der Oberfläche. Steht nun $S \perp \overline{EF}$, so schneiden sich die Normalen, welche durch E und F gehen. Diese Eigenschaft also, dass die Erzeugungslinien der abwickelbaren Umhüllungsfläche auf den Tangenten der Curve normal stehen, und die andere, dass die Normalen entlang der Curve eine abwickelbare Oberfläche geben, sind im Grunde dieselbe Eigenschaft und charakterisiren die Krümmungscurven.

Bei den Rotationsflächen liegen die Normalen entlang dem Meridian alle im Meridian, bilden also eine Ebene, eine solche gehört auch unter die abwickelbaren Flächen. Die Normalen in einem Parallelkreise bilden dagegen einen Kegel.

Monge ist der erste gewesen, der diese Theorie der Krümmungscurven aufgestellt hat, und zwar ging er aus von der Erklärung, dass sie diejenigen Curven sind, längs deren zwei aufeinander folgende Flächennormalen sich treffen. Die Sätze von der Indicatrix und von den conjugirten Tangenten rühren von Charles Dupin, einem Schüler Monge's her.

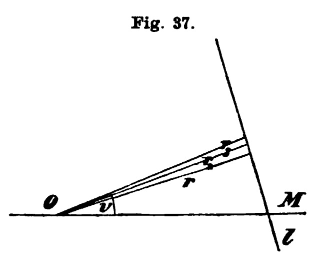
Mit Hülfe dieser Betrachtungen lassen sich eine grosse Anzahl Sätze ganz einfach geometrisch beweisen; z. B. der Satz:

A) Wenn eine Krümmungscurve eben ist, so bildet ihre Ebene mit den Tangentialebenen der Fläche einen constanten Winkel.

Wir schalten zunächst folgenden Satz ein: Wenn man von einem Punkte nach einer Linie zwei andere einander unendlich nahe Linien zieht, so ist ihre Differenz unendlich klein von derselben Ordnung als der Winkel, welchen sie bilden. Ist aber die eine der

beiden Linien normal auf der gegebenen, Fig. 37, so ist ihre Differenz ein Unendlichkleines zweiter Ordnung. Denn ist die gegebene Linie l, der gegebene Punkt O, und zieht man von diesen zwei Linien r_1 und r_2 nach l, von denen die erste mit l den (stumpfen) Winkel w und mit einer als Axe angenommenen festen Geraden OM den Winkel v, die zweite also mit derselben den Winkel $w + dv$ bildet, so ist im Allgemeinen

Fig. 37.



$$r_2 = r_1 \frac{\sin w}{\sin (w + dv)},$$

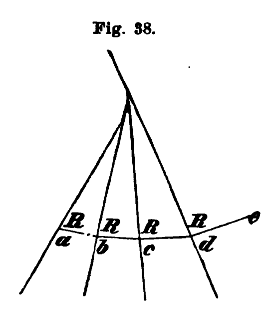
also

$$r_2 - r_1 = r_1 \frac{\sin w - \sin (w + dv)}{\sin (w + dv)} = -2r_1 \frac{\sin \frac{dv}{2} \cos \left(w + \frac{dv}{2}\right)}{\sin (w + dv)},$$

negativ, weil w stumpf ist. Ist dagegen $r \perp l$, also $\sphericalangle\, w = 90^0$, so wird

$$r_1 - r = 2r \frac{\sin^2 \frac{dv}{2}}{\cos dv} = r \frac{\frac{dv^2}{2} - \frac{dv^4}{24} \cdots}{1 - \frac{dv^2}{2} \cdots}.$$

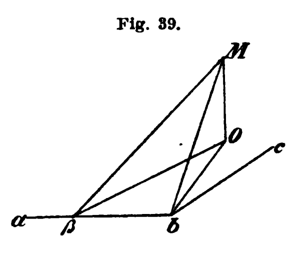
Fig. 38.



Der Ausdruck für $r_2 - r_1$ ist offenbar von derselben Ordnung wie dv; der für $r_1 - r$ aber von der Ordnung wie dv^2.

Dies vorausgeschickt, denken wir uns eine Curve, Fig. 38, welche Krümmungscurve einer Fläche sei. Denken wir uns ferner die abwickelbare Umhüllungsfläche längs dieser Curve, so werden ihre Erzeugungslinien normal sein zu den Tangenten der Curve; es sind also die mit R bezeichneten Winkel rechte. Denken wir uns statt der ebenen Curve ein Polygon, so enthält jede Tangentialebene eine Erzeugungslinie der abwickelbaren Fläche und eine Polygonseite. Es ist nun nachzuweisen, dass der Winkel zwischen diesen Tangentialebenen und der Ebene des Polygons constant bleibt. Es seien ab, bc zwei Seiten des ebenen Polygons, Fig. 39, M ein Punkt in einer Erzeugungslinie der abwickelbaren Fläche, also der Durchschnitt zweier Tangentialebenen;

Fig. 39.



dann soll $\sphericalangle\,(abM, abc) = \sphericalangle\,(cbM, abc)$ sein. Fällen wir von M aus $MO \perp$ auf die Ebene abc, und von dem Fusspunkte O aus $O\beta \perp$ auf

die Linie *ab*, so ist $M\beta O$ der Neigungswinkel der beiden Ebenen *abM* und *abc*, und zwar hat man $\operatorname{tg} M\beta O = \operatorname{tg}(abM,\ abc) = \frac{MO}{O\beta}$. Ebenso findet man $\operatorname{tg}(cbM,\ abc) = \frac{MO}{Ob}$ im rechtwinkligen Dreieck MbO. Da nun $O\beta$ von Ob sich nur um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung unterscheidet, indem $\sphericalangle O\beta b = R$ ist, so ist $\sphericalangle (abM,\ abc) = (cbM,\ abc)$.

Eben so leicht zu beweisen ist folgender Satz.

B) Sei r der Krümmungsradius einer beliebigen Curve auf einer abwickelbaren Fläche, r_1 der Krümmungsradius derjenigen ebenen Curve, welche aus der ersteren entsteht, wenn sie durch Abwickelung in die Ebene fällt, i der Winkel der Tangentialebene der Fläche mit der Krümmungsebene der ersteren Curve, dann ist $r = r_1 \cos i$.

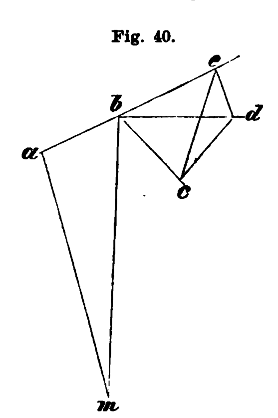


Fig. 40.

Dann seien, Fig. 40, *ab* und *bc* zwei aufeinander folgende Elemente der doppelt gekrümmten Linie, *bm* eine Erzeugungslinie der Fläche, und drehen wir *bc* um *bm*, bis es in die Ebene *abm* fällt, und zwar in der Lage *bd*; *cb* beschreibt dann einen unendlich kleinen Theil eines Rotationskegels mit Axe *bm*. Da aber Fläche *cbd* unendlich klein ist gegen den ganzen Mantel dieses Kegels, so kann diese Fläche auch als eben betrachtet werden, der Winkel, welchen die Ebenen *cbd* und *amb* oder *cbd* und *bde* (wo *be* die Verlängerung von *ab* ist) mit einander bilden, ist dann ein rechter. Machen wir nun $bc = bd = be$, und verbinden c, d und e durch Bogen, die b zum Mittelpunkte haben, dann ist *cde* ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, dessen Hypotenuse $ce = \lambda$, und dessen Kathete $de = \mu$ sein mögen. Da *cbe* die Krümmungsebene der Curve, *ebd* die Tangentialebene der abwickelbaren Fläche ist, so ist Winkel $ced = i$, und also $\cos i = \cot\lambda \operatorname{tg}\mu$. Wegen der unendlich kleinen Grössen λ und μ verwandelt sich $\cot\lambda$ in $\frac{1}{\lambda}$, $\operatorname{tg}\mu$ in μ und man hat: $\lambda \cos i = \mu$. Sei nun $bc = bd = \sigma$, also σ das Bogenelement beider Curven, so ist, da λ und μ die bezüglichen Contingenzwinkel der beiden Curven waren:

$$r = \frac{\sigma}{\lambda},\quad r_1 = \frac{\sigma}{\mu},\quad \frac{r}{r_1} = \frac{\mu}{\lambda} = \cos i,$$

was zu beweisen war.

Nehmen wir jetzt noch an, die Tangentialebene der Fläche stehe auf der Krümmungsebene der doppelt gekrümmten Curve überall

senkrecht, so wird cos $i = 0$, also $r_1 = \infty$, d. h. die Krümmung der ebenen Curve ist Null, und bei der Abwickelung wird unsere Curve auf der Fläche in eine gerade Linie verwandelt.

Nun ist die Gerade die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten, es folgt hieraus zunächst für abwickelbare Flächen folgender Satz:

C) Die kürzesten Linien auf abwickelbaren Flächen haben die Eigenschaft, dass ihre Krümmungsebene in jedem Punkte auf der Tangentialebene der Fläche senkrecht steht, also die Flächennormale in die Krümmungsebene fällt. (Diese Eigenschaft gilt, wie später gezeigt wird, übrigens für die kürzesten Linien auf allen Flächen.)

Die kürzesten Linien auf einem Cylinder sind also die Schraubenlinien.

Uebrigens ändert sich, wie bereits gezeigt, wenn wir unsere Curve durch Abwickeln in eine ebene verwandeln, nicht der Winkel, den ihr Element oder ihre Tangente mit der Erzeugungslinie der abwickelbaren Fläche macht; ist also die abzuwickelnde Curve die Evolvente der Wendungskante, d. h. steht sie auf der Erzeugungslinie überall senkrecht, so behält sie diese Eigenschaft auch nach der Abwickelung bei, also:

D) Die Wendungskante und ihre Evolvente bleiben noch Evolute und Evolvente, wenn man die abwickelbare Fläche, auf der sie sich befinden, durch Abwickeln in eine Ebene verwandelt.

Es sind aber die Evolventen der Wendungskante die Krümmungslinien zweiter Art für die abwickelbare Fläche. Da nun für den Fall eines Kegels die Wendungskante mit dem Scheitelpunkte des Kegels zusammenfällt, so werden beim Kegel die Krümmungslinien nach der Abwickelung in Kreisbögen verwandelt, deren Mittelpunkt der Scheitelpunkt ist. Offenbar folgt hieraus, dass die Krümmungslinien zweiter Art eines Kegels Durchschnitte von Kugeln sind, deren Mittelpunkt der Scheitel des Kegels ist.

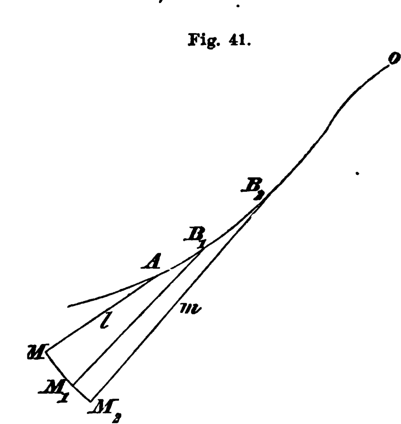
§ 97.

Die Theorie der abwickelbaren Flächen macht es möglich, das § 21 Anmerkung angedeutete Evolutenproblem für einfach und doppelt gekrümmte Curven vollständig zu lösen.

Wenn man in Punkt A einer Curve (Fig. 41), sie sei einfach oder doppelt gekrümmt, eine Tangente zieht, von dieser ein Stück $AM = l$ abschneidet und die Tangente so bewegt, dass sie fortwährend die Curve berührt, so wird Punkt M eine Curve beschreiben, welche man, wie bereits angeführt, Evolvente der gegebenen nennt, die letztere in Bezug zur Evolvente heisst Evolute derselben. Da Linie l be-

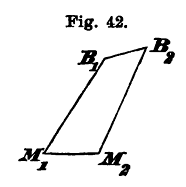
liebig lang war, so hat jede Curve unendlich viel Evolventen; offenbar aber werden bei einer einfach gekrümmten Curve alle Evolventen mit ihr in einer Ebene liegen, bei doppelt gekrümmten liegt jede Evolvente in der abwickelbaren Fläche, deren Wendungskante die Evolute ist, und wird auf dieser Fläche eine Krümmungslinie bilden, wie bereits gezeigt ist. Man kann sich die Evolventen auch durch die Bewegung des Endpunktes eines Fadens entstanden denken, den man gespannt um die Evolute legt und immer tangential gegen diese Curve abwickelt. Es ist auch klar, dass die Evolvente oder ihre Tangente immer auf der entsprechenden Tangente der Evolute senkrecht steht, also eine Normale bildet, dass ferner, wenn A (Fig. 41) der Punkt der Evolute ist, wo die Abwickelung begann, B_1 ein beliebiger Punkt derselben, dann das Stück der Tangente $B_1 M_1$ von B_1 bis zur Evolvente gleich $s+l$ ist, wenn man unter s den Bogen AB_1 versteht.

Fig. 41.



Wenn B_2 ein B_1 benachbarter Punkt der Evolute ist, so beschreibt die Tangente $B_1 M_1$, um in die Lage $B_2 M_2$ zu kommen, einen unendlich kleinen Kreisbogen $M_1 M_2$ um B_2, B_2 ist also der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Radien zwei aufeinander folgende Tangenten der Evolute oder Normalen der Evolvente sind. Wenn nun die Evolute eine ebene Curve ist, was dann, wie oben gesehen, auch bei der Evolvente der Fall ist, so wird B_2 der Krümmungsmittelpunkt der letzteren sein, also: Befinden sich Evolute und Evolvente in einer Ebene, so kann erstere als Ort der Krümmungsmittelpunkte der letzteren definirt werden. Wir werden aber sogleich zeigen, dass jede Curve unendlich viel Evoluten hat, auch wenn erstere eben ist; in diesem Falle liegt dann nur eine Evolute mit der Evolvente in einer Ebene, und nur diese Evolute ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Evolvente. Ist die Evolvente doppelt gekrümmt, so wird aber die Curve der Krümmungsmittelpunkte keine Evolute sein, denn der Krümmungsmittelpunkt der Evolvente befindet sich dann in der Hauptnormale, je zwei aufeinander folgende Hauptnormalen liegen aber in verschiedenen Ebenen. Sind also (Fig. 42) $B_1 B_2$ zwei aufeinander folgende Krümmungsmittelpunkte in den Hauptnormalen $M_1 B_1$ und

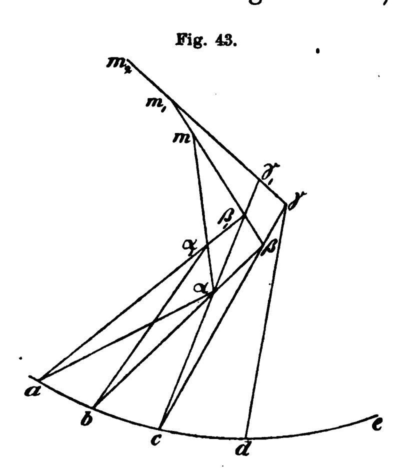
Fig. 42.



M_2B_2, so kann das Element B_1B_2 der Curve der Krümmungsmittelpunkte keine Fortsetzung von M_1B_1 sein, also M_1B_1 wird nicht B_1B_2 berühren.

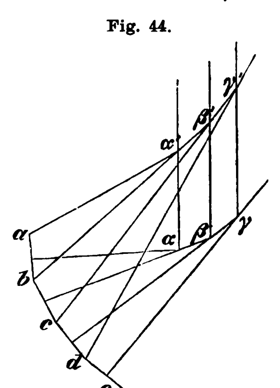
Um nun zu untersuchen, ob eine gegebene Evolvente eine beschränkte Zahl oder unendlich viel Evoluten hat, denken wir uns durch jeden Punkt der ersteren eine Normalebene gelegt. Alle diese Ebenen bilden dann eine abwickelbare Fläche, die wir Evolutenfläche nennen. Seien Fig. 43 $a\alpha m$, $b\beta m_1$, $c\gamma m_2$ solche Ebenen, welche durch die aufeinander folgenden Punkte $a, b, c \cdots$ der Evolvente gelegt sind, αm, βm_1, γm_2 sind dann die Erzeugungslinien der Evolutenfläche, m, m_1, m_2 Punkte von deren Wendungskante. Wir nehmen nun auf αm Punkt α_1 beliebig und ziehen $\alpha_1 a$, die also auf ab senkrecht steht; ziehen wir dann $\alpha_1 b$, so liegt diese Linie in Ebene $b\alpha m$, die mit $b\beta m_1$ identisch ist, wir verlängern $b\alpha_1$, bis sie βm_1 in β_1 schneidet, ziehen $c\beta_1$, die wir bis zum Schnittpunkte γ_1 mit γm verlängern u. s. w. Dann bilden die drei Punkte $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ eine Curve, deren Tangenten $\alpha_1 a$, $\beta_1 b$, $\gamma_1 c$ auf der Evolvente in Punkten a, b, c senkrecht stehen, und daher ist $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ eine Evolute zu abc. Da nun Punkt α_1 beliebig in Linie αm genommen werden kann, hat jede Curve abc unendlich viel Evoluten. Es lässt sich dies auch so ausdrücken: Evolute einer gegebenen Curve ist jede Curve auf ihrer Evolutenfläche, deren Tangenten die gegebene Curve schneiden. Ist die Evolvente doppelt gekrümmt, so ist keine Evolute eben, da sonst die Tangenten derselben mit ihr in einer Ebene liegen, also nicht durch die Evolvente gehen können. Hiernach aber hat auch eine ebene Evolvente unendlich viel Evoluten. Jedoch ist nur eine von diesen eine ebene Curve, nämlich die mit der Evolvente in einer Ebene liegende. Denn zwei aufeinander folgende Tangenten der Evolvente bestimmen eine Ebene und in dieser müsste das dazwischen liegende und das folgende Element der Evolute fallen, wenn letztere eben sein soll. Aus diesem Grunde kann eine ebene Evolvente unter ihren Evoluten nur eine ebene haben, da dieselbe mit ihr in einer Ebene liegen muss. Was die Evolutenfläche anbetrifft, so kann dieselbe auch durch eine Linienconstruction gefunden werden. Zwei aufeinander folgende Normalebenen der Curve abc (Fig. 43) schneiden

Fig. 43.



sich nämlich in einer Linie $\alpha_1 m$, welche auf zwei Elementen ab und bc der ersteren, also auch auf der durch beide gelegten Ebene senksteht, d. h. $\alpha_1 m$ steht auf der Krümmungsebene von abc senkrecht. Sei nun $a\alpha$ eine Hauptnormale von abc und α der Krümmungsmittelpunkt, so geht durch α eine zweite Normale $b\alpha$ der Curve, und α ist also jedenfalls ein Punkt einer Evolute, die jedoch natürlich im Allgemeinen nur diesen Punkt α mit der Curve der Krümmungsmittelpunkte gemein hat. Also jede Erzeugungslinie αm der Evolutenfläche geht durch den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt der Evolvente und steht auf der Krümmungsebene derselben senkrecht. Dies giebt also eine Construction der Erzeugungslinie. Ist die Evolvente eben, so fallen alle Krümmungsebenen derselben mit ihr in eine Ebene, die Erzeugungslinien der Evolutenfläche sind also einander parallel, d. h.: die Evolutenfläche einer ebenen Curve ist ein Cylinder, der auf ihrer Ebene normal steht (Fig. 44).

Fig. 44.



Alle Evoluten derselben Evolvente haben aber noch eine gemeinsame Eigenschaft. Die Ebene zweier aufeinander folgender Erzeugungslinien $\beta_1 m \alpha_1$ (Fig. 43) ist nämlich zugleich Tangentialebene der Evolutenfläche und Normalebene der Evolvente, also senkrecht auf ab, dieses Element aber befindet sich in Ebene $a\beta_1 b$ oder $a\alpha_1\beta_1$, dies ist offenbar die Krümmungsebene der Evolute. Also: Die Tangentialebene der Evolutenfläche steht senkrecht auf der Krümmungsebene jeder Evolute, letztere sind also nach § 96 C) kürzeste Linien auf der Evolutenfläche und gehen bei deren Abwickelung in gerade Linien über. Da nun offenbar beim Abwickeln eines Cylinders (im allgemeineren Sinne des § 3 Anm.) die Schraubenlinien in Gerade verwandelt werden, oder auch beim Aufwickeln einer Ebene auf einen Cylinder aus den Geraden Schraubenlinien werden, so folgt aus dem Obigen: Jede Evolute einer ebenen Curve ist eine Schraubenlinie.

§ 98.

Wir wollen zu diesen Betrachtungen noch die nöthigen Berechnungen hinzufügen. Seien ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes a der Evolvente, x, y, z die eines Punktes α_1 der Evolute (Fig. 43), s der Bogen der letzteren, so sind $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$ die Projectionen von $a\alpha_1$ oder $s + l$ (§ 97) auf die Axen, und da die

Cosinus der Winkel dieser Linie bezüglich gleich $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sind, so hat man:

$$1)\ x - \xi = (s + l)\frac{dx}{ds},\quad 2)\ y - \eta = (s + l)\frac{dy}{ds},\quad 3)\ z - \zeta = (s + l)\frac{dz}{ds}.$$

Diese Gleichungen geben, wenn x, y, z, also auch s als Functionen einer vierten Grösse u gegeben sind, die Gleichungen der Evolventen unmittelbar, und machen nur eine Integration zur Bestimmung von s nöthig. Ist die Evolute eben und als Ebene der xy angenommen, so fällt die dritte Gleichung weg, da z und folglich auch ζ gleich Null sind. Die einzelnen Evolventen unterscheiden sich nur durch den Werth der Constante l.

Jetzt seien die Gleichungen der Evolventen gegeben, also ξ, η, ζ Functionen von einer vierten Grösse u. Unsere drei Gleichungen sind dann die Differentialgleichungen der Evolute; eliminirt man l, so hat man die der Evolutenfläche. Letztere Gleichungen lassen sich aber auch so herstellen, dass sie nur x, y, z und nicht ihre Differentiale enthalten. Durch Differentiiren nach s geben unsere drei Gleichungen:

$$-\frac{d\xi}{ds} = (s + l)\frac{d^2x}{ds^2},\quad -\frac{d\eta}{ds} = (s + l)\frac{d^2y}{ds^2},\quad -\frac{d\zeta}{ds} = (s + l)\frac{d^2z}{ds^2},$$

und wenn man diese Gleichungen bezüglich mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multiplicirt und addirt:

$$d\xi dx + d\eta dy + d\zeta dz = 0,$$

oder:

$$4)\qquad \xi' x' + \eta' y' + \zeta' z' = 0,$$

wo die Striche die Differentiation nach u andeuten mögen.

Diese Gleichung sagt übrigens nur, dass die Tangente der Evolute auf der der Evolvente senkrecht steht, ist also selbstverständlich.

Multipliciren wir aber jetzt die Gleichungen 1), 2), 3) bezüglich mit ξ', η', ζ' und addiren, so erhalten wir als erste Gleichung der Evolutenfläche:

$$5)\qquad (x - \xi)\xi' + (y - \eta)\eta' + (z - \zeta)\zeta' = 0.$$

Diese Gleichung differentiiren wir nochmals nach u und erhalten:

$$(x' - \xi')\xi' + (y' - \eta')\eta' + (z' - \zeta')\zeta' + (x - \xi)\xi'' + (y - \eta)\eta'' + (z - \zeta)\zeta'' = 0;$$

wegen Gleichung 4) wird dieser Ausdruck aber:

$$6)\qquad (x - \xi)\xi'' + (y - \eta)\eta'' + (z - \zeta)\zeta'' = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2.$$

5) und 6) sind die Gleichungen der Evolutenfläche, sie enthalten ausser x, y, z nur noch die Variable u. Um eine Evolute zu bestimmen, ist dann noch eine der Gleichungen 1), 2), 3) nöthig, oder wenn s nicht vorkommen soll, die Gleichung, welche aus Division zweier dieser Gleichungen entsteht, also:

7) $$\frac{dz}{dx} = \frac{z - \zeta}{x - \xi},$$

woraus sich die verschiedenen Evoluten durch Wahl der Integrationsconstante ergeben.

Die Gleichungen 5) und 6) nehmen noch eine etwas bequemere Gestalt an. Wir setzen:

$$\tfrac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \chi,$$

also:

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \chi', \quad \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' + \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \chi'',$$

und erhalten als Gleichungen der Evolutenfläche:

5a) $x\xi' + y\eta' + z\zeta' = \chi'$, 6a) $x\xi'' + y\eta'' + z\zeta'' = \chi''$.

Giebt man der Grösse u, von der ξ, η, ζ, χ allein abhängig sind, einen bestimmten Werth, so stellen diese beiden Gleichungen eine Gerade auf der Evolutenfläche, also ihre Erzeugungslinie dar. Nimmt man einen unendlich nahen Werth von u, also $u + du$, so werden die Gleichungen 5a) und 6a):

$$x(\xi' + \xi''\,du) + y(\eta' + \eta''\,du) + z(\zeta' + \zeta''\,du) = \chi' + \chi''\,du,$$
$$x(\xi'' + \xi'''du) + y(\eta'' + \eta'''du) + z(\zeta'' + \zeta'''du) = \chi'' + \chi'''du.$$

Für den Schnittpunkt zweier aufeinander folgenden Erzeugungslinien, d. h. für einen Punkt der Wendungskante gelten nun diese Gleichungen und 5a), sowie 6a). Zieht man aber 5a) von der ersten dieser Gleichungen ab, so wird sie mit 6a) identisch, zieht man 6a) von der zweiten ab, so erhält man:

8) $$x\xi''' + y\eta''' + z\zeta''' = \chi'''.$$

Diese Gleichung in Gemeinschaft mit 5a) und 6a) oder 5) und 6) bestimmt also die Wendungskante.

Beispiel. Bestimmen wir die Evoluten einer gewöhnlichen Schraubenlinie, deren Gleichungen sind (§ 8):

$$\xi = a \sin t, \quad \eta = a \cos t, \quad \zeta = \frac{bt}{2\pi},$$

a ist der Radius des Cylinders, auf welchem sie liegt, b die Höhe des Schraubenganges, t der veränderliche Winkel, um den sich die Horizontalprojection des Punktes gedreht hat, durch dessen Bewegung die Schraubenlinie entstand. Wir haben also:

$$\chi = \frac{1}{2} a^2 + \frac{b^2 t^2}{8\pi^2}, \quad \xi' = a \cos t, \quad \eta' = -a \sin t, \quad \zeta' = \frac{b}{2\pi},$$

$$\chi' = \frac{b^2 t}{4\pi^2}, \quad \xi'' = -a \sin t, \quad \eta'' = -a \cos t, \quad \zeta'' = 0,$$

$$\chi'' = \frac{b^2}{4\pi^2}.$$

Die Gleichungen der Evolutenflächen 5a) und 6a) sind also:

$$ax \cos t - ay \sin t + \frac{b}{2\pi} z = \frac{b^2 t}{4\pi^2},$$

$$-ax \sin t - ay \cos t = \frac{b^2}{4\pi^2}.$$

Für die Wendungskante ist noch:

$$\xi''' = -a \cos t, \quad \eta''' = a \sin t, \quad \zeta''' = 0, \quad \chi''' = 0;$$

also Gleichnng 8) wird:

$$x \cos t = y \sin t;$$

hierdurch erhält man aus den vorigen Gleichungen:

$$z = \frac{bt}{2\pi}, \quad ax = -\frac{b^2 \sin t}{4\pi^2},$$

also auch

$$ay = -\frac{b^2 \cos t}{4\pi^2}.$$

Offenbar werden diese Gleichungen mit denen der Evolvente identisch, wenn man x und y mit $-x$ und $-y$ vertauscht, was eben nur eine Drehung der x- und y-Axe um 180^0 anzeigt, und für a setzt $\frac{b^2}{4a\pi^2}$, d. h. die Evolutenfläche einer Schraubenlinie wird gebildet von den Tangenten einer zweiten Schraubenlinie mit demselben Gange b. Aus der Form der Gleichungen ist übrigens ersichtlich, dass beide Cylinder dieselbe Axe haben, denn t ist beiden identisch.

Sei jetzt die Evolvente eine ebene Curve, so kann man ihre Ebene als die der $\xi\eta$ betrachten, also $\zeta = 0$ setzen, dann geben die Gleichungen 5) und 6):

$$(x - \xi)\xi' + (y - \eta)\eta' = 0, \quad (x - \xi)\xi'' + (y - \eta)\eta'' = \xi'^2 + \eta'^2,$$

die Gleichung 7) aber wird:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x - \xi}.$$

Die erste Gleichung giebt:

$$y - \eta = -(x - \xi)\frac{\xi'}{\eta'}.$$

Dies setzt man in die zweite und erhält:

$$(x - \xi)(\eta'\xi'' - \xi'\eta'') = \eta'(\xi'^2 + \eta'^2);$$

es lässt sich also x durch u allein ausdrücken, so dass die Gleichung $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x - \xi}$ auf Quadratur zurückgeführt ist. Die beiden Gleichungen für $x - \xi$ und $y - \eta$ geben sowohl den Evolutencylinder, als auch die ebene Evolute, für welche $z = 0$ wird, für diese also nimmt die letzte Gleichung, die man auch schreiben kann $(x - \xi)dz = z \cdot dx$, die Form Null gleich Null an.

Beispiel. Sei die Evolvente eine Parabel, also $\eta^2 = p\xi$; nehmen wir ξ als unabhängige Variable, so ist:

$$\xi' = 1, \quad \eta' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{\xi}}, \quad \xi'' = 0, \quad \eta'' = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{\xi^3}},$$

also die Gleichungen des Evolutencylinders und der ebenen Evolute:

$$x = 3\xi + \frac{p}{2}, \quad y = -4\sqrt{\frac{\xi^3}{p}},$$

woraus sich ergiebt:

$$\text{A)} \qquad \left(x - \frac{p}{2}\right)^3 = \frac{27}{16}py^2,$$

bekanntlich die Gleichungen der Neil'schen Parabel, aber die Gleichung 7) giebt dann:

$$\frac{dz}{z} = \frac{6dx}{4x + p}.$$

Diese Gleichung giebt integrirt:

$$\lg z = \tfrac{3}{2}\lg c\,(4x + p) \quad \text{oder:} \quad \text{B)} \quad c^3(4x + p)^3 = z^2.$$

Die Gleichung A) hat ganz die Form der Gleichung B), also:

Jede Evolute der Parabel hat also zu Projectionen auf zwei Coordinatenebenen Neil'sche Parabeln.

Anmerkung. Eine von anderen Gesichtspunkten ausgehende Theorie der abwickelbaren Flächen, sowie der Evolventen und Evoluten folgt im Anhange.

Die Theorie der kürzesten (geodätischen) Linien auf den Flächen.

§ 99.

Lehrsatz. Die kürzeste oder geodätische Linie zwischen je zwei gegebenen Punkten einer Fläche hat die Eigenschaft, dass ihre Krümmungsebene durch die Normale der Fläche geht, in jedem Punkte der Linie, oder dass der Krümmungsradius zugleich eine Normale der Fläche ist.

Beweis. Auf der Fläche $F(x, y, z = 0)$ seien zwei Punkte (1) $= (a, b, c)$, (3) $= (a', b', c')$ gegeben. Es handle sich zunächst darum, einen Punkt (2) $= (x, y, z)$ auf der Fläche zu finden, so dass die

Summe der beiden Sehnen (1, 2) + (2, 3) ein Minimum werde. Wir haben also, wenn wir die erste Sehne u, die zweite u' nennen, den Ausdruck $u + u'$ zum Minimum zu machen, und zwar ist

$u^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2, \quad u'^2 = (a'-x)^2 + (b'-y)^2 + (c'-z)^2,$

worin auch x, y, z der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ genügen soll. Dies ist somit eine Aufgabe des sogenannten relativen Minimums.

Wir haben also die Summe $u + u' + hF$ nach x, y, z partiell zu differentiiren und die Differentialquotienten gleich Null zu setzen:

$$\frac{a'-x}{u'} - \frac{x-a}{u} = h \cdot P, \quad \frac{b'-y}{u'} - \frac{y-b}{u} = h \cdot Q,$$
$$\frac{c'-z}{u'} - \frac{z-c}{u} = h \cdot R,$$

wo $P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$, $R = \frac{\partial F}{\partial z}$ zu setzen ist. Diese Gleichungen ergeben zusammen mit der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ die Werthe für h, x, y, z. Diese Betrachtung bezieht sich aber nur auf den Grenzfall, dass die Punkte (a, b, c) und (a', b', c') unendlich nahe aneinander liegen. Setzen wir $x - a = \varDelta x$, so ist $\frac{\varDelta x}{u}$ bekanntlich der Cosinus des Winkels, den die Sehne u mit der Axe der x macht. Rücken (1) und (2) einander unendlich nahe, so geht der Bruch in $\frac{dx}{ds}$ über, denn die Sehne wird zur Tangente; die Sehne u' wird alsdann zur nächsten Tangente, deren Winkel mit der x-Axe folglich den Cosinus $\frac{dx}{ds} + d\frac{dx}{ds}$ hat: dies ist die Grenze von $\frac{a'-x}{u'}$. Somit wird

$$\lim\left(\frac{a'-x}{u'} - \frac{x-a}{u}\right) = \left(\frac{dx}{ds} + d\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dx}{ds} \quad \text{oder} \quad d\frac{dx}{ds} = h \cdot P.$$

Man erhält also jetzt folgende drei Gleichungen:

$$1) \qquad d\frac{dx}{ds} = h \cdot P, \quad d\frac{dy}{ds} = h \cdot Q, \quad d\frac{dz}{ds} = h \cdot R.$$

Nehmen wir s als unabhängige Veränderliche, also ds als constant an und dividiren diese Gleichungen durch ds, so werden sie:

$$2) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = k \cdot P, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = k \cdot Q, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = k \cdot R,$$

wenn der constante Bruch $\frac{h}{ds} = k$ gesetzt wird. Diese drei Gleichungen aber enthalten unsern Lehrsatz: die linken Seiten unserer Gleichungen sind proportional den Cosinus der Winkel, welche der Krümmungshalbmesser (§ 10), die rechten den Cosinus der Winkel, welche die Normale der Fläche (§ 45) mit den drei Axen bildet; also fällt der Krümmungshalbmesser längs der ganzen Ausdehnung der kürzesten Linie zusammen mit der entsprechenden Normale der Fläche.

§ 100.

Seien noch die Richtungscosinus der Tangente der geodätischen Linie α, β, γ dieselben Grössen für die Normale λ, μ, ν, so erhält man aus den Gleichungen 1) auch:

3) $$d\alpha = \varrho\lambda ds, \quad d\beta = \varrho\mu ds, \quad d\gamma = \varrho\nu ds,$$

und da $\lambda = \frac{P}{S}$ ist u. s. w., so hat man: $\varrho = kS$, wo $S^2 = P^2 + Q^2 + R^2$ war, $\varrho^2 = \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2$.

Vermöge der Flächengleichung, oder ihrer Differentialgleichung $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$, wird eine der Gleichungen 3) identisch, und es bleibt nach Elimination von ϱ nur noch eine Gleichung: $\frac{d\alpha}{\lambda} = \frac{d\gamma}{\nu}$ übrig, welche mit der Flächengleichung die kürzeste Linie vollständig bestimmt.

Wir geben dieser Gleichung noch eine andere Form.

Schreiben wir die drei Endgleichungen des vorigen Paragraphen so, dass die unabhängige Veränderliche unbestimmt bleibt, so gehen sie über in folgendes System:

A) $$\frac{dsd^2x - dxd^2s}{ds^2} = \mu \cdot P, \quad \frac{dsd^2y - dyd^2s}{ds^2} = \mu \cdot Q, \quad \frac{dsd^2z - dzd^2s}{ds^2} = \mu \cdot R.$$

Die drei Gleichungen enthalten aber noch die Grösse μ. Eliminirt man diese, so erhält man nur noch zwei Gleichungen, welche sich aber wiederum auf eine reduciren, indem man jenen drei Gleichungen aus zweien immer die dritte folgt. Dies sieht man daraus, dass man aus ihnen eine identische Gleichung ableiten kann, und zwar, indem man sie der Reihe nach mit dx, dy, dz multiplicirt und die Producte addirt. Dann erhält man links, weil

$$dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = ds \cdot d^2s \quad \text{und} \quad (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (ds)^2$$

ist:
$$\frac{ds \cdot ds \cdot d^2s - (ds)^2 \cdot d^2s}{ds^2},$$

also Null. Rechts erhält man μ multiplicirt mit der Summe

$$P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz,$$

und diese ist auch Null. Alle drei Gleichungen vertreten somit nur die Stelle von einer, und diese kann man, indem man jene Gleichungen der Reihe nach mit

$$dyd^2z - dzd^2y, \quad dzd^2x - dxd^2z, \quad dxd^2y - dyd^2x$$

multiplicirt und alsdann addirt, folgendermassen schreiben:

$$0 = P(dyd^2z - dzd^2y) + Q(dzd^2x - dxd^2z) + R(dxd^2y - dyd^2x).$$

Diese Gleichung ergiebt sich auch unmittelbar aus dem in § 99 bewiesenen Lehrsatze, dass die Krümmungsebene in jedem Punkte der Curve durch die Normale der Fläche geht. Denn die Gleichung der Krümmungsebene lautet:

$$(\xi - x)(dy d^2 z - dz d^2 y) + (\eta - y)(dz d^2 x - dx d^2 z)$$
$$+ (\zeta - z)(dx d^2 y - dy d^2 x) = 0,$$

und die der Normale:

$$\frac{\xi - x}{P} = \frac{\eta - y}{Q} = \frac{\zeta - z}{R}.$$

Wir können die Gleichung der kürzesten Linie auch in der Determinantenform schreiben:

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x & P \\ dy & d^2y & Q \\ dz & d^2z & R \end{vmatrix} = 0.$$

Es war nun die Gleichung der Krümmungscurven:

$$\begin{vmatrix} dx & P & dP \\ dy & Q & dQ \\ dz & R & dR \end{vmatrix} = 0,$$

so dass zwischen beiden eine gewisse Analogie stattfindet, von welcher später noch die Rede sein wird.

Die Gleichung der kürzesten Linie enthält x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, weil man z und seine Differentialquotienten mittelst der Gleichung der Fläche zu eliminiren hat. Sieht man x als unabhängige Variable an, so ist folglich die Gleichung der kürzesten Linie eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung, und hat als solche zwei Constanten. Daraus folgt, dass man auf der Fläche zwischen zwei beliebigen Punkten immer eine kürzeste Linie ziehen kann, und dass von jedem Punkte der Fläche aus unzählig viele kürzeste Linien sich erstrecken.

Ist die Gleichung der Fläche in der Form $z = \varphi(x, y)$ gegeben, so kann man die Gleichung der kürzesten Linie so schreiben:

$$dx(- d^2y - q d^2z) + p(dy d^2z - dz d^2y) = 0,$$

oder geordnet:

$$d^2y(dx + p dz) + d^2z(q dx - p dy) = 0.$$

Hierin hat man noch aus der Gleichung der Fläche

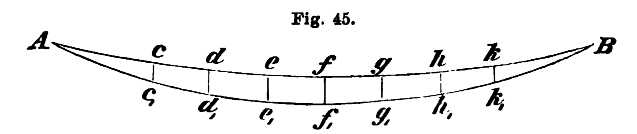
$$dz = p dx + q dy, \quad d^2z = dp dx + dq dy + q d^2y,$$
$$dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy$$

einzusetzen.

§ 101.

Geometrischer Beweis des Lehrsatzes in § 99. In § 96 haben wir bereits bewiesen, dass auf jeder abwickelbaren Fläche die Krümmungsebene der kürzesten Linie die Normale enthält, und dass dies die unmittelbare Folge der Eigenschaft war, dass, wenn die Fläche in die Ebene abgewickelt wird, aus der kürzesten Linie eine gerade werden muss. Nun lässt sich aber durch jede Curve auf einer Fläche, also auch durch die kürzeste Linie eine abwickelbare Fläche legen, welche die gegebene Fläche berührt. Die Erzeugunglinien derselben sind dann die conjugirten Tangenten derjenigen der kürzesten Linie. Da nun die ersteren wie alle Tangenten als Sehnen anzusehen sind, die mit der gegebenen Fläche einen zweiten unendlich nahen Punkt gemein haben, so kann man annehmen (Fig. 45), dass, wenn

Fig. 45.



$A, c, d, e \ldots B$ Punkte der kürzesten Linie einer Fläche und $c_1, d_1, e_1, \ldots$ benachbarte Punkte auf der letzteren sind, dass beide Reihen Punkte auch auf der oben erwähnten abwickelbaren Fläche liegen, und somit Linie $Acde \ldots B$ kürzer als die durch A und B gehende benachbarte Linie auf der Fläche ist, mithin die obige Eigenschaft besitzt.

Es könnte hiernach zunächst scheinen, als wenn dieser Beweis nur zeigte, dass Linie $Acd \ldots B$ nur kürzer als die auf einer Seite von ihr liegenden angrenzenden Linien sei. Es kann jedoch jede Tangente als Verbindungslinie des betreffenden Punktes mit einem nächsten Punkte gedacht werden, möge dieser auf der einen oder andern Seite einer durch den Berührungspunkt gehenden Curve liegen, so dass unser Beweis für alle der geodätischen benachbarten Curven auf der Fläche gilt. Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich aber noch ohne weitere Rechnung die Allgemeingültigkeit des für abwickelbare Flächen bewiesenen Satzes: Wickelt man die kürzeste Linie in eine Ebene, indem man jedes Element um die ihm conjugirte Tangente dreht, so wird die kürzeste Linie eine gerade. Denn die kürzeste und die benachbarten Linien liegen ja in der durch die Tangenten der ersteren und die conjugirten bestimmten abwickelbaren Fläche.

§ 102.

(Beweis desselben Satzes durch Variationsrechnung.) x, y, z seien gegeben als Functionen einer vierten Grösse t, durch deren Elimination man die Gleichung der Fläche $F(x, y, z) = 0$ erhalten muss. Diese Beziehungen geben dann irgend eine Curve auf der Fläche. Die Länge derselben wird gegeben durch das Integral

$$\int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt.$$

Nennt man den Werth von t, der dem Anfangspunkte A der Curve entspricht, α und einen zweiten Werth von t, der dem Punkte B der Curve entspricht, β, so ist unsere Aufgabe, das Integral

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

zum Minimum zu machen.

Wir denken zwischen den Punkten A und B eine andere Curve gezogen, welche von der ersten sehr wenig abweicht, dann muss diese neue Curve länger sein als die erste. Wir werden diese zweite Curve, welche von der ersten sehr wenig abweicht, finden, wenn wir in der ersten statt x, y, z resp. $x + \varepsilon \cdot \delta x$, $y + \varepsilon \cdot \delta y$, $z + \varepsilon \cdot \delta z$ setzen, wenn nämlich ε eine sehr kleine constante Grösse und δx, δy, δz ganz willkürliche Functionen von t sind. Sie sind nun zwei Bedingungen unterworfen: erstens muss die neue Curve ebenfalls durch A und B gehen, d. h. δx, δy, δz müssen einzeln Null sein für $t = \alpha$ und für $t = \beta$. Zweitens muss die neue Curve auch auf der Fläche liegen, d. h. es muss also $F(x + \varepsilon\delta x,\ y + \varepsilon\delta y,\ z + \varepsilon\delta z) = 0$ sein. Demnach muss auch die Gleichung bestehen:

$$\frac{1}{\varepsilon}\{F(x + \varepsilon\delta x,\quad y + \varepsilon\delta y,\quad z + \varepsilon\delta z) - F(x, y, z)\} = 0,$$

und zwar muss sie für jeden Werth von ε bestehen. Entwickelt man daher die Klammergrösse vermittelst des Taylor'schen Lehrsatzes nach Potenzen der Incremente $\varepsilon \cdot \delta x$, $\varepsilon \cdot \delta y$, $\varepsilon \cdot \delta z$, führt dann die Division mit ε aus, und setzt ε gleich Null, so hat man noch folgende Bedingungsgleichung für die Grössen δx, δy, δz:

$$P \cdot \delta x + Q \cdot \delta y + R \cdot \delta z = 0.$$

Mit Beobachtung dieser Gleichungen muss also sein:

$$\int_\alpha^\beta dt\sqrt{\left(\frac{dx+\varepsilon\cdot d\delta x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy+\varepsilon\cdot d\delta y}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz+\varepsilon\cdot d\delta z}{dt}\right)^2}$$
$$>\int_\alpha^\beta dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Dies ist aber der Fall, wenn links, nachdem man nach ε entwickelt hat, das mit ε multiplicirte Glied Null, das mit ε^2 multiplicirte positiv ist. Es ist nun

$$\sqrt{\left(\frac{dx+\varepsilon\cdot d\delta x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy+\varepsilon\cdot d\delta y}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz+\varepsilon\cdot d\delta z}{dt}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+2\varepsilon\left\{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\delta x}{dt}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\delta y}{dt}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\delta z}{dt}\right\}+\cdots}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}+\varepsilon\,\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\delta x}{dt}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\delta y}{dt}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\delta z}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}+\cdots.$$

Wir haben demnach das Integral des Coefficienten von ε:

$$\int_\alpha^\beta\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\delta x}{dt}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\delta y}{dt}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\delta z}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}\,dt=0$$

zu setzen. Da nun

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\frac{ds}{dt}$$

ist, so können wir diese Gleichung so schreiben:

$$\int_\alpha^\beta\left\{\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\delta x}{dt}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d\delta y}{dt}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d\delta z}{dt}\right\}dt=0.$$

Untersuchen wir zunächst:

$$\int_\alpha^\beta\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\delta x}{dt}\cdot dt.$$

Dieses Integral können wir durch theilweise Integration auf folgende Form bringen:

$$\left\{\delta x\cdot\frac{dx}{ds}\right\}_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta\delta x\cdot\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dt}\,dt.$$

Das vom Integralzeichen freie Glied ist aber Null, weil $\delta x=0$, wenn $t=\alpha$ oder β ist. Demnach wird unsere vorige Gleichung:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\delta x\cdot\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dt}\cdot dt+\delta y\cdot\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dt}\cdot dt+\delta z\cdot\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{dt}dt\right\}=0,$$

worin man dt wiederum als gemeinschaftlichen Factor herausnehmen kann. Wären nun δx, δy, δz ganz willkürlich, so könnte dieses Integral nur dann Null sein, wenn der Factor, mit welchem dt multiplicirt ist, Null wäre. Es besteht aber, wie wir oben gesehen haben, die Gleichung $P\cdot\delta x+Q\cdot\delta y+R\cdot\delta z=0$. Bezeichnen wir nun die Grösse unter dem Integralzeichen mit $U\delta x+V\delta y+W\delta z$, so kann unser Integral nur Null werden, wenn man hat

$$(U-\lambda P)\delta x+(V-\lambda Q)\delta y+(W-\lambda R)\delta z,$$

wo λ eine beliebige Constante ist; bestimmen wir diese so, dass $U=\lambda P$ ist, so werden auch die Factoren von δy und δz, die nun von einander unabhängig sind, verschwinden, und es ist:

$$\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dt}=\lambda\cdot F'(x),\quad\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dt}=\lambda\cdot F'(y),\quad\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{dt}=\lambda\cdot F'(z),$$

oder:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\lambda\cdot\frac{dt}{ds}\cdot P,\quad\frac{d^2y}{ds^2}=\lambda\cdot\frac{dt}{ds}\cdot Q,\quad\frac{d^2z}{ds^2}=\lambda\cdot\frac{dt}{ds}\cdot R.$$

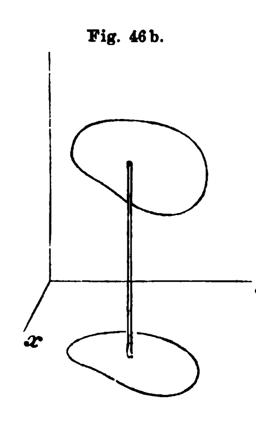
Eliminirt man hieraus $\lambda\cdot\frac{dt}{ds}$, so erhält man nur zwei Gleichungen, welche sich wiederum auf eine reduciren lassen. Denn multiplicirt man unsere drei Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, so ergiebt sich identisch $0=0$. Also vertreten diese drei Gleichungen nur die Stelle von einer, und diese ist dieselbe als die, welche wir oben für die kürzesten Linien gefunden haben.

Digression auf eine andere Minimumsaufgabe.

§ 103.

Ganz nach denselben Principien löst man folgende Aufgabe, welche in dasselbe Gebiet gehört: Wenn irgend eine beliebige Begrenzung gegeben ist, die Fläche durchzulegen, welche den kleinsten Flächeninhalt hat [Lagrange, miscellanea Taurinensia]. Wenn diese Begrenzung in einer Ebene sich befindet, so ist die gesuchte Fläche ebenfalls selbstverständlich eben. Es kommen also nur die Fälle in Erwägung, wo die Begrenzung entweder doppelt gekrümmt ist, oder aus zweien nicht in einer Ebene liegenden Theilen besteht (Fig. 46 a und b). Lassen wir zunächst die

Grenzen, welche sich nach der gegebenen Curve richten, unbestimmt, so ist unsere Aufgabe, den Ausdruck $\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dx\,dy$ zum Minimum zu machen. Wir setzen daher statt z: $z+\varepsilon\cdot\delta z$, indem wir statt der gesuchten Fläche eine neue bestimmen, welche aber der ersten sehr nahe ist. Dadurch wird p zu $p+\varepsilon\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial x}$ und q zu $q+\varepsilon\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial y}$. Also geht $\sqrt{1+p^2+q^2}$ über in



$$\sqrt{1+p^2+q^2+2\varepsilon\left(p\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial x}+q\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial y}\right)+\cdots},$$

oder in

$$\sqrt{1+p^2+q^2}+\varepsilon\cdot\frac{p\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial x}+q\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial y}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\cdots$$

Setzen wir daher $\sqrt{1+p^2+q^2}=W$, so muss

$$\iint\left(\frac{p\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial x}}{W}+\frac{q\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial y}}{W}\right)dx\,dy=0$$

sein, und zwar innerhalb derselben Grenzen, für welche $\iint W\,dx\,dy$ ein Minimum sein soll. Es ist nun

$$\int\frac{p\,\frac{\partial\delta z}{\partial x}}{W}\,dx=\frac{p}{W}\,\delta z-\int\delta z\cdot\frac{\partial\left(\frac{p}{W}\right)}{\partial x}\,\delta x$$

immer innerhalb derselben Grenzen. An diesen Grenzen ist δz Null, also haben wir die Gleichung

$$-\iint\delta z\cdot\frac{\partial\frac{p}{W}}{dx}\,dx\,dy-\iint\delta z\cdot\frac{\partial\frac{q}{W}}{\partial y}\,dx\,dy=0,$$

oder

$$-\iint\delta z\cdot\left(\frac{\partial\frac{p}{W}}{\partial x}+\frac{\partial\frac{q}{W}}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$$

Im übrigen Verlauf der Fläche (mit Ausnahme der Grenzen) ist aber δz ganz beliebig; also muss

$$\frac{\partial\frac{p}{W}}{\partial x}+\frac{\partial\frac{q}{W}}{\partial y}=0$$

sein. Die Flächen, welche dieser Gleichung genügen, lösen die Aufgabe. Um die Gleichung zu interpretiren, führen wir die Differentiation aus. Es ist

$$\frac{\partial \frac{p}{W}}{\partial x} = \frac{Wr - p\frac{pr+qs}{W}}{W^2} = \frac{r + p^2r + q^2r - p^2r - pqs}{W^3} = \frac{r(1+q^2) - pqs}{W^3},$$

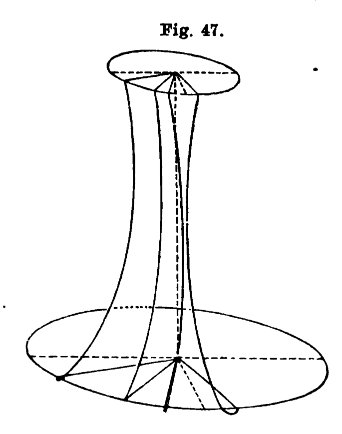
wo $$\frac{dp}{dx} = r, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s, \quad \frac{dq}{dy} = t \quad \text{ist.}$$

Also wird unsere Gleichung, wenn wir sie mit W^3 multipliciren:

$$r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2) = 0,$$

d. h. bei den Flächen, welche diese Aufgabe lösen, ist (§ 58) die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser $= 0$, oder die Hauptkrümmungen gleich und entgegengesetzt. — Der Ausdruck links ist der Coefficient von ϱ in der Gleichung des § 58 für den Hauptkrümmungsradius, abgesehen von einem Factor; das Verschwinden dieses Coefficienten zeigt dann, dass die Summe $\varrho_1 + \varrho_2$ gleich Null ist.

Fig. 47.



Ein interessantes Beispiel hierzu ist folgendes: Zwei Kreise liegen einander parallel so (Fig. 47), dass ihre Mittelpunkte normal übereinander sind. Welches ist die kleinste Fläche, die man durch beide hindurchlegen kann? Zunächst ist so viel klar, dass es jedenfalls eine Umdrehungsfläche sein wird. Denn zieht man irgendwo in beiden Kreisen zwei Paar paralleler Radien, und an einer beliebigen andern Stelle der Peripherie ebenfalls zwei Paar, welche denselben Winkel einfassen, so müssen die Streifen der gesuchten Fläche, welche durch die Ebenen ausgeschnitten werden, die man durch je zwei parallele Radien hindurchlegt, einander gleich sein. Wäre der eine grösser als der andere, so könnte man, um an jener Stelle ein Minimum in dem verlangten Sinne herzustellen, den andern Streifen an seine Stelle setzen. Es sind somit alle diese Streifen gleich, was eben die Eigenschaft der Rotationsfläche ist. Wir können folglich die Gleichung der gesuchten Fläche in folgender Form schreiben: $z = f(\xi)$, $\xi^2 = x^2 + y^2$. Dann ist

$$p = f' \cdot \frac{x}{\xi}, \quad q = f' \cdot \frac{y}{\xi}, \quad \text{also} \quad W = \sqrt{1 + f'^2}.$$

Setzen wir noch der Kürze halber $\frac{f'}{\xi \cdot W} = L$, so wird unsere partielle Differentialgleichung folgende:

$$\frac{\partial(xL)}{\partial x} + \frac{\partial(yL)}{\partial y} = 0 \quad \text{oder} \quad 2L + \left(x\frac{\partial \xi}{\partial x} + y\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\frac{\partial L}{\partial \xi} = 0,$$

$$\text{oder}\quad 2L + \xi\frac{\partial L}{\partial \xi} = 0,\quad \text{oder}\quad 2\frac{\partial \xi}{\xi} + \frac{\partial L}{L} = 0.$$

Integrirt giebt diese Gleichung $2l\xi + lL + \text{const.} = 0$, oder in den Numeris

$$\xi^2 \cdot L = a,\quad \text{d. i.}\quad \frac{\xi f'}{\sqrt{1 + f'^2}} = a,$$

$$\text{oder}\quad \xi^2 f'^2 = a^2 + a^2 f'^2,\quad \text{d. i.}\quad \xi^2\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = a^2 + a^2\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2,$$

$$\text{oder}\quad \frac{dz}{d\xi} = \frac{a}{\sqrt{\xi^2 - a^2}}$$

und durch Integration:

$$z = a\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}} = a \cdot l\,\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - a^2}}{b},$$

wo $-a \cdot lb$ die willkürliche Constante ist. Setzt man statt b aber $a \cdot e^{\alpha}$, so wird unsere Gleichung:

$$z = a \cdot l\,\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - a^2}}{a \cdot e^{\alpha}},$$

oder in der exponentiellen Gestalt:

$$a \cdot e^{\frac{z}{a} + \alpha} = \xi + \sqrt{\xi^2 - a^2}.$$

Daraus folgt sogleich:

$$a \cdot \frac{1}{e^{\frac{z}{a} + \alpha}} = \frac{a^2}{\xi + \sqrt{\xi^2 - a^2}} = \frac{a^2(\xi - \sqrt{\xi^2 - a^2})}{\xi^2 - \xi^2 + a^2},$$

$$\text{oder}\quad a \cdot e^{-\frac{z}{a} - \alpha} = \xi - \sqrt{\xi^2 - a^2}.$$

$$\text{Mithin wird:}\quad \xi = \frac{a}{2}\left\{e^{\frac{z}{a} + \alpha} + e^{-\frac{z}{a} - \alpha}\right\};$$

dies ist aber die Gleichung der Kettenlinie. Die kleinste Fläche also, welche die angegebene Begrenzung hat, ist entstanden durch Rotation einer Kettenlinie.

Die Integrationsconstanten a und α bestimmen sich durch die Entfernung der beiden Kreise und ihre Radien.

Digression auf mechanische Probleme.

§ 104.

Die kürzesten Linien finden eine häufige Anwendung in der Mechanik. Wir wollen davon zwei wichtige Beispiele anführen.

1) Wenn ein Punkt auf einer Fläche $F(x, y, z) = 0$ sich bewegt, und die Kräfte, welche dies bewirken, mit X, Y, Z bezeichnet werden, so sind bekanntlich die Differentialgleichungen der Bewegung folgende:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \cdot F'(x), \quad m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda \cdot F'(y),$$
$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda \cdot F'(z).$$

Wirken aber auf den Punkt ausser einem ersten Impulse gar keine Kräfte, so sind X, Y, Z einzeln gleich Null, und die Differentialgleichungen der Bewegungen sind jetzt folgende:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda \cdot P, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda \cdot Q, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda \cdot R$$

in den Bezeichnungen des § 56. Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{2dx}{dt}$, $\frac{2dy}{dt}$, $\frac{2dz}{dt}$ und addirt sie alsdann, so kommt rechts 0, links das Differential von $\frac{d^2s}{dt^2}$ heraus. Man hat also durch Integration $ds = \alpha \cdot dt$, wo α die Constante. Hiernach können wir dt eliminiren, und erhalten dadurch, wenn wir $\frac{\lambda}{\alpha^2} = \mu$ setzen:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \mu \cdot P, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \mu \cdot Q, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \mu \cdot R.$$

Dies sind aber die Gleichungen der kürzesten Linie. Also haben wir den Lehrsatz:

Wenn ein Punkt gezwungen ist, sich auf einer Fläche zu bewegen, und keine beschleunigenden Kräfte auf ihn einwirken, so beschreibt er eine kürzeste Linie.

2) Ein zweiter Fall ist folgender: Wenn ein Faden auf einer Fläche gespannt wird, und auf den Faden weiter keine Kräfte wirken, also auch von seiner Schwere abstrahirt wird, so nimmt der Faden die Gestalt der kürzesten Linie an. Denn, bezeichnet T die Spannung, so bleibt das Element im Gleichgewichte durch folgende Kräfte:

$$Xds + T\frac{dx}{ds} - \left[T\frac{dx}{ds} + d\left(T\frac{dx}{ds}\right)\right] \quad \text{oder} \quad Xds - d\left(T\frac{dx}{ds}\right)$$

und zwei analoge für die anderen Componenten. Dazu kommt der Widerstand der Fläche in der Richtung der x-Axe: $+ \lambda F' \cdot (x)ds$ oder $+ \lambda \cdot Pds$. Fürs Gleichgewicht muss nun die Summe aller Componenten in einer Richtung Null sein; man hat also

$$Xds - d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + \lambda Pds = 0, \quad Yds - d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \lambda Qds = 0,$$
$$Zds - d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + \lambda Rds = 0.$$

Sind die Kräfte X, Y, $Z = 0$, so haben wir:

$$\frac{d\left(T\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = \lambda P, \quad \frac{d\left(T\frac{dy}{ds}\right)}{ds} = \lambda Q, \quad \frac{d\left(T\frac{dz}{ds}\right)}{ds} = \lambda R,$$

also: $\frac{dT}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}+T\frac{d^2x}{ds^2}=\lambda P,\quad \frac{dT}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}+T\frac{d^2y}{ds^2}=\lambda Q,$

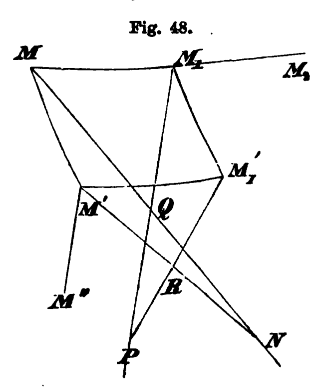
$$\frac{dT}{ds}\cdot\frac{dz}{ds}+T\frac{d^2z}{ds^2}=\lambda R.$$

Multipliciren wir diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ und addiren, so entsteht: $\frac{dT}{ds}\cdot 1+T\cdot 0=\lambda\cdot 0$, oder $\frac{dT}{ds}=0$, also $T=\alpha$. Setzen wir diesen Werth in die drei Gleichungen ein, so werden sie wiederum zu den Gleichungen der kürzesten Linie.

§ 105.

Wir schalten hier noch einen Satz über die Evoluten der Krümmungslinien ein, welcher hierher gehört: In jedem Punkte der Evolute steht ihre Osculationsebene auf der entsprechenden Tangentialebene der Evolutenfläche senkrecht, bildet also eine kürzeste Linie auf derselben. Dieser Satz lässt sich leicht geometrisch beweisen (Fig. 48). Sei $MM_1M_1'M'$ ein von vier Krümmungslinien eingeschlossenes unendlich kleines Rechteck. (Es soll beiläufig bemerkt werden, dass das Wort Rechteck hier nicht ganz in dem gewöhnlichen Sinne zu nehmen ist. Da nämlich die Seiten unendlich klein sind, so kommen bei den Winkeln auch die unendlich kleinen Grössen erster Ordnung in Betracht. Dann ist also nur der Winkel, in dem sich zwei nach einer Seite hin schneiden, also M_1MM' ein Rechter, setzen wir die Krümmungslinien fort, so sind $M_2M_1M_1'$, $M''M'M_1'$ rechte, die Winkel $MM'M_1'$, $M'M_1'M_1$ weichen um unendlich kleine Grössen von einem Rechten ab.) Legen wir nun durch die vier Eckpunkte M, M_1, M', M_1' Normalen an die Fläche, so dass sich die durch M und M_1 gehenden in Q, die durch M und M' in N, die durch M_1 und M_1' in P, die durch M' und M_1' in R schneiden. MN und $M'N$ sind dann die Richtungen der aufeinander folgenden Tangenten der Evolute, ihre Ebene $MM'N$ oder $MM'Q$ ist also die Krümmungsebene derselben. MN ist eine Tangente, P ein ihr unendlich naher Punkt der Evolutenfläche, die Ebene MNP, d. h. MQP oder M_1MN also Tangentialebene derselben. Der Neigungswinkel von $M'MN$ und M_1MN ist aber M_1MM', also ein Rechter.

Fig. 48.



Wir wollen aber für diesen Satz nicht allein einen analytischen Beweis geben, sondern zugleich denselben auch erweitern. Zu dem Ende bemerken wir:

Wir haben als Evolutenfläche einer gegebenen Fläche diejenige Fläche bezeichnet, welche durch die Krümmungsmittelpunkte der letzteren gebildet ist, d. h. bei welcher die Normalen der letzteren Tangenten der ersteren sind.

Jetzt denken wir uns umgekehrt auf einer Fläche eine Schaar von Curven gezogen, und durch jeden Punkt einer jeden dieser Schaar eine Tangente gelegt.

Wenn es nun eine Fläche giebt, für welche diese Tangenten sämmtlich die Normalen sind, so können wir diese analog der Theorie der ebenen Curven als Evolventenfläche der gegebenen bezeichnen.

Es entstehen also folgende zwei Fragen: 1) Giebt es zu jeder Fläche eine Evolventenfläche? 2) Wie muss, wenn dies der Fall ist, die Schaar der Curven, welche auf der gegebenen Fläche gezogen ist, beschaffen sein, damit ihre Tangenten die verlangte Eigenschaft haben?

Ein Theil der zweiten Frage erhält eine Antwort, wenn die Frage 1) bejaht wird, aus den eben gegebenen geometrischen Betrachtungen. Da nämlich die Tangenten der gegebenen d. h. die Normalen der Evolventenfläche sich zu je zwei aufeinander folgenden schneiden, so werden sie auf der letzteren eine Schaar Krümmungslinien bilden, und daher die gegebene Fläche in geodätischen Linien berühren. Da es aber unendlich viel Systeme geodätischer Linien auf jeder Fläche giebt, so würden noch die Eigenschaften des zu wählenden Systems zu bestimmen sein. Wir beantworten also beide Fragen ganz allgemein.

Sei $w = f(u, v)$ die Gleichung der gegebenen Fläche, auf dieser befinde sich eine beliebige Curvenschaar, irgend eine Tangente einer solchen mache Winkel mit den Axen, deren Cosinus α, β, γ sind, dann ist (§ 45) die Bedingung dafür, dass diese sämmtlichen Tangenten Normalen einer anderen Fläche sind:

$$1) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial \gamma}{\partial v} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \gamma}{\partial u} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}.$$

Es soll nun $v = \varphi(u)$ die Gleichung einer Curve aus unserer Schaar sein, also

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{dw}{du} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

und auch:

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial \alpha}{\partial v} \cdot \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{d\beta}{du} = \frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \beta}{\partial v} \cdot \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{d\gamma}{du} = \frac{\partial \gamma}{\partial u} + \frac{\partial \gamma}{\partial v} \cdot \frac{\beta}{\alpha}.$$

Mittelst dieser Gleichungen eliminiren wir aus 1) die partiellen Differentialquotienten, welche nach v genommen sind, dies giebt:

$$\left(\frac{d\alpha}{du} - \frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)\frac{\alpha}{\beta} + \left(\frac{d\gamma}{du} - \frac{\partial \gamma}{\partial u}\right)\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \gamma}{\partial u}\left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\alpha}{\beta}.$$

Wegen
$$\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \beta\frac{\partial \beta}{\partial u} + \gamma\frac{\partial \gamma}{\partial u} = 0$$

nimmt aber diese Gleichung die Gestalt an:

$$\frac{d\alpha}{du} + \frac{d\gamma}{du}\cdot\frac{\partial w}{\partial u} = 0.$$

Sind nun λ, μ, ν die Cosinus der Winkel, welche die Normale wie die gegebene Fläche mit den Axen macht, also

$$\frac{\partial w}{\partial u} = -\frac{\lambda}{\nu}, \quad \text{so ist} \quad \frac{d\alpha}{\lambda} = \frac{d\gamma}{\nu}.$$

Dies ist aber nach § 99 die ausreichende und nöthige Bedingung, dass unsere Curven geodätische Linien auf unserer Fläche sind, also: Zieht man auf irgend einer Fläche irgend eine Schaar geodätischer Linien, so bilden ihre Tangenten die Normalen einer andern Fläche, geben also eine Evolventenfläche, und die Tangenten jeder geodätischen Linie der ersteren schneiden die letztere in einer Krümmungslinie. Jede Fläche hat nun, für jede gegebene Schaar geodätischer Linien auf derselben, unendlich viel Evolventenflächen, sodass es deren für eine gegebene Fläche unendlich mal unendlich viele giebt.

§ 106.

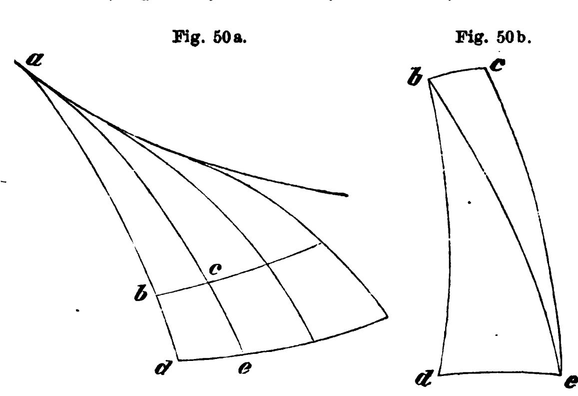
Lehrsatz. Wenn man von einem Punkte einer Fläche nach allen Richtungen gleich lange geodätische Linien zieht und ihre Endpunkte verbindet, so steht die Verbindungslinie auf allen senkrecht.

Fig. 49.

Beweis. Wir betrachten (Fig. 49) zwei vom Punkte O ausgehende benachbarte und gleiche geodätische Linien $OA = OB$. Wären die Winkel bei A und B keine Rechte, sondern z. B. bei A der spitze, bei B also der stumpfe Winkel, so könnte man von B aus Linie BC nach AO hinziehen, sodass BC auf AB senkrecht steht. Da dann die unendlich kleinen Seiten des Dreiecks ABC als geradlinig betrachtet werden können, so ist AC Hypotenuse, also $AC > CB$ und auch $OB = OA = OC + CA > OC + CB$. Es wäre OB nicht die kürzeste Entfernung der Punkte O und B auf der Fläche, was der Voraussetzung widerspricht. Dass dieser Satz sich umkehren lässt, leuchtet sofort ein. Also: „Schneiden sich eine Anzahl geodätischer Linien in einem Punkte O der Fläche und schneidet man von allen gleiche

Stücke von O aus ab, verbindet dann die Endpunkte, so steht die Verbindungslinie auf allen geodätischen Linien senkrecht."

Unser Satz lässt sich aber auch folgendermassen verallgemeinern. Wenn irgend eine Schaar kürzester Linien auf einer Fläche von einer andern Curve auf derselben orthogonal geschnitten wird, und man trägt von der ganzen Schaar von den Schnittpunkten an gleiche Stücke ab, so liegen die Endpunkte wieder in einer Curve, die auf der ganzen Schaar senkrecht steht. Dies ist einleuchtend, wenn von den kürzesten Linien je zwei unendlich nahe sich schneiden. Denn dann ist (Fig. 50 a) $ad = ae$, $ab = ac$, also $bd = ce$ u. s. w. Schneiden sich (Fig. 50 b), was ein Ausnahmefall ist, die Linien bd und ce nicht, so sei bc ein Element der Orthogonalcurve und $bd = ce$. Man ziehe dann be, so muss, da das Element bc der Orthogonalcurve angehört und rechtwinklig auf be fortgesetzt werden kann, $be = ce$ sein. Da nun also auch $be = db$ ist, so muss de auf bd senkrecht stehen, also ebenfalls der Orthogonalcurve angehören.



Auch dieser Satz kann umgekehrt werden.

2) Der analytische Beweis stellt sich so: Denkt man sich von einem Punkte aus nach allen Richtungen hin beliebige Linien gezogen, nicht bloss kürzeste, und auf denselben von diesem Punkte aus dieselbe Strecke u abgetragen, so wird offenbar der Winkel, den die Curve der Endpunkte dieser u mit den Strahlen macht, sehr verschieden sein können von einem rechten Winkel. Denkt man sich nun die Strecke u immer kleiner werdend, aber auf allen Curven gleich gross, so zieht sich die Curve, die ihre Endpunkte verbindet, immer mehr zusammen. Wird u unendlich klein, so kann man alle Endpunkte ansehen als in derselben Ebene liegend mit dem Punkte, von dem man ausgegangen ist; sie bilden folglich alsdann einen unendlich kleinen Kreis, und dieser steht somit normal auf allen Strahlen. — Hat man also von einem Punkte O einer Fläche nach allen Richtungen hin, also unzählige viele kürzeste Linien gezogen und nimmt irgend eine unter ihnen als die erste an, so wird jede andere gegeben

sein, wenn man weiss, welchen Winkel v im Anfange bei O ihre Tangente mit der Tangente der ersten bildet. Nennt man ferner die Länge einer solchen kürzesten Linie vom Punkte O aus bis zu einem Punkte auf ihr gerechnet u, so kann offenbar jeder Punkt der Fläche gegeben werden durch die beiden Grössen u und v; d. h. man kann seine drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z jede als Function von u und v darstellen. In diesem Coordinatensysteme wollen wir nun die Gleichung der kürzesten Linien für Punkt O aufstellen, d. h. die Frage lösen: Welche Functionen müssen x, y, z von u und v sein, oder wie müssen diese Functionen beschaffen sein, damit diejenigen Curven, für welche v constant ist, u aber variabel, kürzeste Linien sind? Damit eine Curve kürzeste Linie ist, muss ihre Krümmungsebene normal stehen auf der Tangentialebene der Fläche. Die Tangentialebene der Fläche hat die Gleichung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{d x}{\partial v}\right)(\zeta-z)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)(\xi-x)$$
$$+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)(\eta-y)=0.$$

Die Krümmungsebene derjenigen Curve, für welche v constant ist, u aber variabel, ist (§ 11)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)(\zeta-z)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)(\xi-x)$$
$$+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)(\eta-y)=0.$$

Diese beiden Flächen schneiden sich rechtwinklig, wenn

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)=0 \text{ ist.}$$

Dieses Aggregat von Producten lässt sich in folgenden Ausdruck transformiren:

$$\left\{\frac{\partial x^2}{\partial u^2}+\frac{\partial y^2}{\partial u^2}+\frac{\partial z^2}{\partial u^2}\right\}\left\{\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right\}$$
$$-\left\{\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right\}\left\{\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right\}=0$$

d. i.:

$$E\cdot\left\{\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right\}-F\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}=0.$$

Es ist aber

$$E = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial u^2} = \frac{du^2}{du^2} = 1,$$

denn du ist das Bogenelement der Curven U, um die es sich hier handelt. Dadurch wird unsere Gleichung folgende: $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ oder, einmal integrirt: F eine Function von v allein.

Hieraus und aus der zu Anfange dieses zweiten Beweises angeführten geometrischen Hilfsbetrachtung ergiebt sich unser Lehrsatz sofort. Die Grösse $\frac{F}{\sqrt{E \cdot G}}$ bedeutet den Cosinus des Winkels zwischen den Curven U und V (§ 74). Nehmen wir für alle Curven U, d. h. für alle kürzesten Linien, u constant, so erhalten wir die Curve V, welche die Endpunkte aller dieser gleichlangen kürzesten Linien verbindet. Lassen wir u immer kleiner werden, so wird der Winkel dieser Endpunktencurve mit den kürzesten Linien, wie oben gezeigt wurde, schliesslich 90°; also sein Cosinus gleich Null. Es muss mithin $F = 0$ sein für $u = \frac{1}{\infty}$, da aber F von u unabhängig ist, muss F allgemein gleich Null sein, d. h. die Endpunktencurve steht auf allen kürzesten Linien normal.

Anmerkung. Dieser Beweis giebt sofort die obige Erweiterung unseres Satzes. Denkt man sich nämlich auf einer Fläche irgend eine Curve gezogen und eine Anzahl kürzester Linien, die darauf normal stehen und auf allen diesen kürzesten Linien von der ersten Curve aus, die zum V-Systeme gehören möge, gleiche Längen abgetragen, so erhält man eine neue Curve, für welche man auf dieselbe Art beweisen kann, dass $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ ist oder F nur von v abhängt. Da aber für die erste Curve der Cosinus des Winkels zwischen U und V, also auch $F = 0$ ist, so findet diese Gleichung auch für die neuen Curven statt, und wir erhalten somit den oben gegebenen allgemeineren Satz.

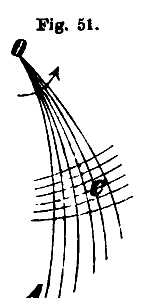
Dass der oben bewiesene Lehrsatz nur ein specieller Fall hiervon ist, geht daraus hervor, dass der Punkt, von welchem wir oben ausgingen, als Degeneration jeder geschlossenen Curve angesehen werden kann.

Der eben bewiesene Satz gehört zu den vielen, wo es sich um die Länge von Curven handelt, und deren geometrischer Beweis viel leichter als der analytische zu führen ist, weil der Zuwachs solcher Linien, wenn er unendlich klein ist, als geradlinig betrachtet werden kann, während die Länge der Linien selbst complicirte Form hat.

§ 107.

Auf diesen Satz begründet **Gauss** ein neues Coordinatensystem. Es ist folgendes: Man lege durch irgend einen Punkt O auf einer Fläche (s. Fig. 51) unzählig viele kürzeste Linien nach allen Richtungen. u sei die Entfernung irgend eines Punktes auf der Oberfläche von O; es wird also u angesehen werden können als die eine Coordinate, indem alle Punkte, welche gleiches u haben, auf einer Curve liegen, die auf allen Curven des ersten Systems normal steht. Betrachtet man eine beliebige dieser kürzesten Linien z. B. OA als erste, so wird jeder Punkt C der Fläche vollständig gegeben sein, wenn erstens sein u, d. h. die geodätische Entfernung OC bekannt ist, und ausserdem der Winkel v, welchen OC in O mit der ersten Curve OA macht.

Fig. 51.



Es ist dieses Coordinatensystem ganz analog den Polarcoordinaten in der Ebene. — Wäre O der Pol der Erde, so wären u die Poldistanzen und v die geographischen Längen.

In diesem Coordinatensysteme ist also für jede durch O gehende kürzeste Linie v constant, für jede auf derselben senkrechte Curve u constant. Die Grösse F ist $= 0$, weil die beiden Systeme auf einander normal stehen.

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

wird $= 1$, denn u ist der Bogen. Die Grösse G endlich oder

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

wollen wir $= m^2$ setzen, so dass also m^2 eine Function von u und v ist. Demnach wird das Linienelement irgend einer Curve auf dieser Oberfläche $ds = \sqrt{du^2 + m^2dv^2} = dv\sqrt{u'^2 + m^2}$, was auch aus dem rechtwinkligen Dreieck folgt, dessen Katheten du und mdv, nämlich die Differentiale der Curven des ersten und des zweiten Systems, und dessen Hypotenuse ds ist.

Wir wollen nun zunächst sehen, wie der Ausdruck für das Maass der Krümmung wird, welches wir durch k bezeichnen wollen, und welches (§ 83) durch die Gleichung $k = \frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}$ gegeben wird. Wir finden, weil $E = 1$, $F = 0$ ist, nach § 81:

$$\varrho_1\varrho_2 = \frac{4G^2}{\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - 2G\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right)}.$$

Setzen wir also $G = m^2$, so wird

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2m\frac{\partial m}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = 2m\frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + 2\left(\frac{\partial m}{\partial u}\right)^2.$$

Demnach wird der vorige Ausdruck zu folgendem einfacheren:

$$\varrho_1\varrho_2 = -\frac{m}{\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}},$$

also endlich $k = -\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}$. Dies ist also das Maass der Krümmung in diesen Coordinaten.

Ueber die Grösse m wollen wir noch bemerken, dass für $u = 0$ unabhängig von v: $m = 0$ und $\frac{dm}{\partial u} = 1$ wird. Denn mdv ist das Bogenelement der Orthogonalcurve, und da diese für unendlich kleines u als Kreis mit dem Radius u zu betrachten ist, so hat man für solche Werthe $mdv = udv$, $m = u$, so dass beide gleichzeitig verschwinden, und $dm = du$, also $\frac{\partial m}{\partial u} = 1$ wird.

§ 108.

Gauss beantwortet hiernach die Frage: Welches ist die Gleichuug der kürzesten Linie zwischen zwei gegebenen Punkten auf einer Oberfläche, ausgedrückt durch die krummlinigen Coordinaten u und v?

Nach dem vorigen Paragraphen handelt es sich bei dieser Aufgabe darum, das Integral $\int\sqrt{u'^2 + m^2}\cdot dv$ innerhalb gegebener Grenzen zum Minimum zu machen. Wir setzen daher statt u: $u + \varepsilon\cdot\delta u$, also statt u': $u' + \varepsilon\cdot\delta u'$, entwickeln alsdann das Integral nach Potenzen von ε, und setzen endlich das mit ε multiplicirte Glied:

$$\int\left\{\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + m^2}}\,\delta u' + \frac{m\frac{\partial m}{\partial u}\,\delta u}{\sqrt{u'^2 + m^2}}\right\}dv,$$

innerhalb derselben Grenzen genommen, gleich Null. Der erste Theil dieses Integrals lässt sich aber theilweise integriren, und berücksichtigt man, dass δu an den Grenzen Null sein muss, so erhält man folgende Gleichung aus der vorigen:

$$-\int\delta u\left\{\left(\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + m^2}}\right)' - \frac{m\frac{\partial m}{\partial u}}{\sqrt{u'^2 + m^2}}\right\}dv = 0.$$

Daraus folgt, weil diese Gleichung für alle Werthe von δu stattfinden muss, die folgende Differentialgleichung für die kürzesten Linien

$$\frac{m\frac{\partial m}{\partial u}}{\sqrt{u'^2 + m^2}} - \left(\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + m^2}}\right)' = 0.$$

Anstatt dieser Differentialgleichung der zweiten Ordnung hat Gauss zwei der ersten Ordnung eingeführt und zwar vermittelst einer neuen Hilfsgrösse. LL sei irgend eine Curve auf der Fläche, (Fig. 52); ihr Bogen von irgend einem Punkte an gerechnet sei s, und zwar werde dieser Bogen so gerechnet, dass er mit wachsendem u ebenfalls zunimmt. Der Winkel v, welchen die u nach den verschiedenen Punkten von LL gezogen mit OA, dem ersten u, bilden, werde ebenfalls in der Richtung gezählt, dass er zunimmt, wenn u grösser wird. Alsdann werden die einzelnen Punkte der Curve LL unzweideutig durch eine Gleichung zwischen u und v gegeben sein. Nun sei ϑ der Winkel, welchen das Bogenelement der Curve LL mit dem Bogenelemente des Systems U macht, und zwar so genommen, dass seine Schenkel s und u wachsen. Man hat alsdann folgende Gleichungen:

Fig. 52.

$$\cos\vartheta = \frac{du}{ds} \text{ und da } ds^2 = du^2 + m^2dv^2 \quad \text{ist:}$$

$$\sin\vartheta = \frac{mdv}{ds}, \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{mdv}{du},$$

welche somit für alle Curven LL gelten, sie mögen kürzeste Linien sein oder nicht.

Mit Hülfe dieses Winkels lässt sich nun die Gleichung der kürzesten Linie, welche wir auch so schreiben können:

$$\frac{m\frac{\partial m}{\partial u}}{\frac{ds}{dv}} - \left(\frac{\frac{du}{dv}}{\frac{ds}{dv}}\right)' \quad \text{oder} \quad \frac{m\frac{\partial m}{\partial u}}{\frac{ds}{dv}} - \left(\frac{du}{ds}\right)' = 0,$$

wo der Accent die Ableitung nach v anzeigt, in folgende umformen:

$$\frac{m\frac{\partial m}{\partial u}}{\frac{ds}{dv}} - (\cos\vartheta)' = \text{ oder } \frac{m\frac{\partial m}{\partial u}}{\frac{ds}{dv}} + \sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dv} = 0$$

oder endlich $\frac{\partial m}{\partial u} + \frac{d\vartheta}{dv} = 0$. Diese Gleichung gilt also speciell für die Veränderungen des ϑ bei den kürzesten Linien. Setzt man statt ϑ in sie den Werth desselben aus einer der obigen drei allgemeinen Gleichungen, so kommt man wieder auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

§ 109.

Mit Hülfe dieser Formeln lässt sich nun ein anderer Satz von Gauss beweisen, der einer der schönsten in der ganzen Theorie der Flächen ist. Wir schicken dazu voraus folgende

Erklärung. Es sei ein Dreieck auf einer Fläche gegeben, dessen Seiten kürzeste Linien sind. Man denke sich entlang dieses Dreiecks Normalen der Fläche gezogen. Ferner denke man sich eine Kugel mit dem Radius 1, und zu jeder Normale der Fläche einen ihr parallelen Radius der Kugel gezogen. Man erhält dadurch auf der Kugel wiederum ein Dreieck, welches nur in dem speciellen Falle ein sogenanntes sphärisches Dreieck sein wird, dass die Fläche, von der man ausgeht, selbst eine Kugel ist. Den Inhalt des letzteren Dreiecks auf der Kugel nennt Gauss die curvatura integra oder Totalkrümmung des Dreiecks auf der gegebenen Fläche. Sind die drei Winkel des Dreiecks auf der gegebenen Fläche, d. h. die Winkel, welche die begrenzenden kürzesten Linien in den Durchschnittslinien mit einander machen, A, B, C, so nennt man die Differenz $A + B + C - \pi$ den sphärischen Excess und, falls diese Differenz negativ ist, die Differenz $\pi - (A + B + C)$ den sphärischen Defect.

Lehrsatz. Die Totalkrümmung eines Dreiecks, das von kürzesten Linien auf einer Oberfläche gebildet wird, verhält sich zur Oberfläche der Kugel, wie der sphärische Excess resp. Defect seiner Winkel zu 8 Rechten.

Beweis. Nach § 83 ist, wenn σ und s die dort angegebene Bedeutung haben, der Quotient $\frac{\sigma}{s} = \frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}$. Offenbar ist die Totalkrümmung des Dreiecks ABC (Fig. 53) gleich $\Sigma\sigma$ innerhalb gewisser Grenzen, die sich nach den Seiten von ABC richten werden. Es ist also Curv. int. $= \Sigma \frac{s}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}$.

Fig. 53.

Denken wir uns nun eine Spitze des Dreiecks z. B. A als Anfangspunkt eines Coordinatensystems, wie wir es jetzt zuletzt betrachtet haben, so werden wir die beiden Seiten AB und AC als zwei Curven des Systems U ansehen können, wo v constant ist. Denken wir uns nun zwei unendlich nahe Curven dieses Systems und zwei unendlich nahe Curven des zweiten Systems V, für welches u constant ist, so werden diese ein unendlich kleines Rechteck ausschneiden, welches wir als zweites Differential nach u und v von ABC ansehen können. Seine Seiten sind dv und $m \cdot du$; wir erhalten demnach für unser Rechteck $s = m \cdot du \cdot dv$, und haben folglich den Ausdruck $\frac{m \cdot du \cdot dv}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}$ in Bezug auf u und v für alle Werthe zu integriren, die innerhalb des gegebenen Dreiecks fallen. Dies gelingt vermöge der Gleichung

$$\frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2} = k = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial u^2},$$

wo $m^2 = G$ ist. Unser Integral wird also

$$\Sigma\sigma = \int\int -\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}\, du\, dv.$$

Wir führen zunächst die Integration in Bezug auf u aus, d. h. wir berechnen die Totalkrümmung für den unendlich schmalen Streifen, der zwischen den beiden unendlich nahen Curven U liegt. Diese Integration ergiebt

$$\Sigma\sigma = \int_0^u \left(c - \frac{\partial m}{\partial u}\right) dv.$$

Die Grenzen für u sind 0 und der Werth, den es auf der Linie BC hat, und der eine Function von v ist. Da nun für $u = 0$ das Dreieck ABC zum Punkte A zusammenschrumpft, und folglich um so mehr unser unendlich kleines Dreieck, so ist für $u = 0$: $c - \frac{\partial m}{\partial u} = 0$. Da aber für $u = 0$ nach § 107 $\frac{\partial m}{\partial u} = 1$ ist, so wird die Constante $c = 1$. Also wird

$$\Sigma\sigma = \int \left(1 - \frac{\partial m}{\partial u}\right) dv,$$

oder mit Einführung des Winkels ϑ, den die Linien des Systems V mit denen des Systems U in dem § 108 angegebenen Sinne bilden, vermöge der Gleichung $\frac{dm}{du} + \frac{d\vartheta}{dv} = 0$,

$$\Sigma\sigma = \int \left(1 + \frac{d\vartheta}{dv}\right) dv = \int dv + \int d\vartheta.$$

$\int dv$ ist offenbar der Winkel A, wenn man die Grenzen für v einsetzt, welche 0 und A sind. Setzt man ferner den Winkel, welchen BC mit einer Curve U bildet, immer in dem angegebenen Sinne, gleich ϑ_0, und den mit der nächsten Curve U gleich ϑ_1, so ist $d\vartheta$ offenbar $= \vartheta_1 - \vartheta_0$. Der Ausdruck $\int d\vartheta$ wird also die Summe aller ähnlichen Differenzen, aus welcher sich folglich alle dazwischenliegenden Winkel ausser dem ersten und letzten herausheben. Bezeichnet man diese resp. mit β und γ, so wird folglich $\int d\vartheta = \gamma - \beta$ d. i. $= C - (\pi - B)$ $= B + C - \pi$. Somit haben wir endlich: der Flächeninhalt der Totalkrümmung ist Curv. int. $= A + B + C - \pi$. Die Oberfläche der Kugel mit dem Radius 1 ist $= 4\pi$, das Verhältniss dieser beiden Grössen giebt $\frac{A + B + C - \pi}{4\pi}$, was zu beweisen war.

Dieser Beweis gilt für den Fall, dass ϱ_1 und ϱ_2 gleiches Zeichen

haben. Haben ϱ_1 und ϱ_2 entgegengesetztes Zeichen, so ist $\frac{\sigma}{s} = \frac{-1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}$, weil σ und s wesentlich positiv sind. Dadurch erhält also unser Resultat das negative Zeichen; es wird $= \frac{\pi - (A + B + C)}{4\pi}$. Dies geschieht also, wenn die gegebene Fläche eine solche ist, deren Hauptkrümmungen entgegengesetzt sind.

Dieser Satz ist offenbar eine Erweiterung der bekannten Formel für den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks. Nimmt man statt des Dreiecks auf der Fläche ein beliebiges Polygon, dessen Seiten kürzeste Linien sind, so erhält man einen Satz, welcher dem vom sphärischen Polygon analog ist, denn man kann das Polygon durch kürzeste Linien in Dreiecke zerlegen.

Anmerkung. Es sind auch einfachere Beweise für diesen Satz von der Totalkrümmung gefunden worden. Jacobi hat aber einen Satz aufgestellt, der allgemeiner ist, indem er weder von kürzesten Linien noch überhaupt von Flächen ausgeht*). Der Satz lautet: Bildet man irgend ein Dreieck, dessen Seiten Curven doppelter Krümmung sind, und welches die Eigenschaft hat, dass in den Ecken, wo zwei Curven zusammenstossen, die Krümmungsradien beider gleiche Richtung besitzen, und zieht man ferner zu den sämmtlichen Krümmungsradien der Curven parallele Strahlen einer Hülfskugel, so ist der Inhalt des auf der Kugel gebildeten Dreiecks auf dieselbe Weise wie oben durch den sphärischen Excess oder Defect gegeben. — Dass unser Fall hierher gehört, folgt aus § 106, denn da die gegebene Fläche in jeder Ecke nur eine Normale hat und die Schmiegungsebenen beider sich dort schneidenden kürzesten Linien durch diese Normale gehen, so fallen die Krümmungsradien beider in die Normale.

Man kann diesen Jacobi'schen Satz aus dem obigen Gaussschen durch die Betrachtung ableiten, dass sich zu einem Dreieck, welches die von Jacobi verlangte Bedingung erfüllt, immer eine Fläche finden lässt, auf der die Dreieckseiten geodätische Linien sind. Indess kann der Beweis auch direct geführt werden.

§ 110.

Die geodätische Linie bildet eine Art Gegensatz zur Krümmungslinie. Die letztere können wir nach ihrer zweiten Definition als diejenige betrachten, bei welcher immer eine Tangente und zwei aufeinander folgende Normalen in einer Ebene liegen; nach der Definition

*) Derselbe wird im Anhange bewiesen, welcher auch einen zweiten Beweis des Gauss'schen Satzes, sowie eine Erweiterung des letzteren giebt.

des § 99 ist nun die geodätische Linie diejenige, bei welcher eine Normale und zwei aufeinander folgende Tangenten eine Ebene bilden. In der That kommt dieser Gegensatz durch die Gleichungen beider Arten von Curven zum Ausdruck, denn die Gleichungen 2) des § 99 lauten auch:

1) $d\alpha = \varrho\lambda ds, \quad d\beta = \varrho\mu ds, \quad d\gamma = \varrho\nu ds, \quad \varrho^2 = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{ds^2},$

während die der Krümmungslinie die Form hatten:

2) $d\lambda = r\alpha ds, \quad d\mu = r\beta ds, \quad d\nu = r\gamma ds, \quad r^2 = \frac{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2}{ds^2}.$

Wie leicht zu sehen, bilden diese Gleichungen den analytischen Ausdruck dafür, dass es zu einer gegebenen Fläche eine andere giebt, wo die durch eine Krümmungslinie gelegten Normalen der ersteren Tangenten einer geodätischen Linie der letzteren bilden, und umgekehrt. Offenbar ist letztere Fläche die Evolutenfläche der ersteren.

Dennoch lässt sich aber für die Krümmungslinien und geodätischen Linien eine Gleichung finden, die beiden angehört.

Multiplicirt man nämlich die Gleichung 1) bezüglich mit $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ und addirt und multiplicirt man die Gleichungen 2) bezüglich mit $d\alpha, d\beta, d\gamma$ und addirt, so erhält man dasselbe Resultat, nämlich:

3) $$d\alpha d\lambda + d\beta d\mu + d\gamma d\nu = 0.$$

Hieraus schliesst man, dass beiden Curvenarten gewisse Eigenschaften gemein sein werden, und in der That werden wir dies bei den Flächen zweiten Grades bestätigt finden. Hier bemerken wir aber, dass das Verhalten der Gleichung 3) zu denen 1) und 2) dennoch ein verschiedenes ist. Die Gleichungen 1) der kürzesten Linie enthalten nämlich die zweiten Differentialquotienten von x, y, z, da $d\alpha = d\frac{dx}{ds}$ u. s. w. ist, ebenso wie Gleichung 3), dieselbe ist mithin von keiner höheren Ordnung und kann die Gleichungen 1) ersetzen. Dagegen ist in den Gleichungen 2) der Krümmungslinie

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds} \quad \text{u. s. w.,}$$

sie enthält also nur die ersten Differentialquotienten, diese Gleichungen 2) bilden also schon ein Integral der Gleichung 3).

Wir wollen diese letztere Gleichung jetzt aber so umformen, dass sie die Coordinaten enthält. Es sei:

$$\lambda = \frac{P}{S}, \quad \mu = \frac{Q}{S}, \quad \nu = \frac{R}{S}, \quad S^2 = P^2 + Q^2 + R^2,$$

also $PdP + QdQ + RdR = SdS, \quad \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds};$

wir erhalten also aus Gleichung 3)

$$(SdP - PdS)\,d\frac{dx}{ds} + (SdQ - QdS)\,d\frac{dy}{ds} + (SdR - RdS)\,d\frac{dz}{ds} = 0.$$

Nun ist

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

also auch:

$$Pd^2x + Qd^2y + Rd^2z = -(dPdx + dQdy + dRdz)$$

und

$$d\frac{dx}{ds} = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2};$$

dies in unsere Gleichung gesetzt, giebt:

$$(dPdx + dQdy + dRdz)\,dsdS + Sds\,(dPd^2x + dQd^2y + dRd^2z)$$
$$- S(dPdx + dQdy + dRdz)\,d^2s = c, \quad \text{d. h.:}$$

4)
$$\frac{dPd^2x + dQd^2y + dRd^2z}{dPdx + dQdy + dRdz} + \frac{dS}{S} - \frac{d^2s}{ds} = 0.$$

Das letzte Glied verschwindet, wenn man s als unabhängige Variable betrachtet. Die beiden letzten Glieder aber lassen sich integriren. Gelingt es, das erste Glied dieser Gleichung auf ein vollständiges Differential zurückzuführen, so ist diese Gleichung integrirt; das Integral, welches eine Constante enthält, muss, wenn die geodätische Linie bestimmt werden soll, nochmals integrirt werden, wo sich dann die Gleichung dieser Curve mit zwei Constanten ergiebt.

Die Krümmungslinie aber, für welche das erste Integral auch gilt, ist durch diese Integration dann vollständig bestimmt, da mittelst einer der Gleichungen 2) und der Differentialgleichung der Fläche sich die Grössen $\alpha = \frac{dx}{ds}$, β und γ eliminiren lassen, sodass das Resultat nur die Coordinaten enthält.

§ 111.

Aufgabe. Die kürzesten Linien auf allen Rotationsflächen zu finden.

Die Gleichungen A des § 100 lassen sich auch schreiben:

$$d^2x + dx\,d\lambda + Pd\vartheta^2 = 0,$$
$$d^2y + dy\,d\lambda + Qd\vartheta^2 = 0,$$
$$d^2z + dz\,d\lambda + Rd\vartheta^2 = 0,$$

wenn man

$$-d\vartheta^2 = \mu ds$$

und

$$d\lambda = -\frac{d^2s}{ds}$$

setzt.

Die allgemeine Rotationsfläche hat die Gleichungen

$$z = f(\xi), \quad \xi^2 = x^2 + y^2.$$

Es ist also

$$P = f' \frac{\partial \xi}{dx} = f' \frac{x}{\xi}, \quad Q = f' \frac{y}{\xi}, \quad R = -1,$$

und unsere drei Gleichungen werden

$$d^2x + d\lambda dx + d\vartheta^2 f' \cdot \frac{x}{\xi} = 0,$$

$$d^2y + d\lambda dy + d\vartheta^2 f' \cdot \frac{y}{\xi} = 0,$$

$$d^2z + d\lambda dz - d\vartheta^2 \qquad = 0.$$

Eliminiren wir aus den beiden ersten $d\vartheta$, so ergiebt sich

$$y d^2x - x d^2y + d\lambda\,(ydx - xdy) = 0,$$

oder $\quad dN + Nd\lambda = 0, \quad$ wo $\quad N = ydx - xdy$

gesetzt ist; wegen des Werthes von $d\lambda$ ergiebt sich hieraus: $\frac{dN}{N} = \frac{d^2s}{ds}$, also erhalten wir durch Integration

$$\lg N = \lg(\nu ds), \quad N = \nu ds,$$

wo ν eine beliebige Constante ist, d. h.

$$ydx - xdy = \nu \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Um diese Gleichung nochmals zu integriren, nehmen wir irgend einen Meridian zum nullten und nennen den Winkel, den ein anderer mit ihm bildet u, so können wir vermöge der Gleichung der Rotationsfläche schreiben $x = \xi \cos u$, $y = \xi \sin u$, $z = f(\xi)$. Danach verwandelt sich unsere Gleichung in folgende

$$-\xi^2 du = \nu \sqrt{d\xi^2 + \xi^2 du^2 + f'^2 d\xi^2}$$

oder $\quad du^2\{\xi^4 - \nu^2\xi^2\} = \nu^2 d\xi^2 \{1 + f'^2\},$

also können wir die Variabeln trennen, und haben somit die integrable Gleichung gefunden:

$$\text{A)} \qquad du = \frac{\nu d\xi}{\xi} \sqrt{\frac{1 + f'^2}{\xi^2 - \nu^2}}.$$

Um die Grenzen ansetzen zu können, wollen wir bestimmen, dass für den nullten Meridian, wo $u = 0$ ist, der Radius des Parallelkreises, in welchem die kürzeste Linie den Meridian trifft, r_0 sei, und der des Parallelkreises, in welchem sie den Meridian, für welchen $u = u$ ist, trifft, r. Dann wird das Integral

$$u = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{d\xi}{\xi} \sqrt{\frac{1 + f'^2}{\xi^2 - \nu^2}}.$$

Die Differentialgleichung $-\xi^2 du = v ds$ hat einen einfachen geometrischen Sinn. Man denke sich zwei unendlich nahe Meridiane, (siehe Fig. 54), deren Winkel also du ist, und einen Theil der kürzesten Linie ab, welcher zwischen ihnen liegt. Ferner sei ac das zwischen ihnen liegende Stück des Parallelkreises, der durch a geht. Dann ist $ac = \xi \cdot du$, $ab = ds$. Ferner im rechtwinkligen Dreieck bac ist $ac = ab \cdot \cos bac = ab \cdot \sin Mab = ab \cdot \sin i$. Also wird $\xi \cdot du = ds \sin i$ und $\xi^2 du = \xi ds \sin i$, also $\xi \sin i = v$, also constant.

Fig. 54.

Betrachtet man z. B. bei der Kugel irgend zwei Meridiane M und M' mit den Radien ξ und ξ' und bestimmt die Winkel i und i', so hat man $\xi \cdot \sin i = \xi' \cdot \sin i'$. Es ist aber, wenn man die Stücke der Meridiane vom Pole bis zu der kürzesten Linie mit φ und φ' bezeichnet, $\xi = a \sin \varphi$, $\xi' = a \sin \varphi'$, wo a der Kugelradius ist, man hat somit die Gleichung: $\sin \varphi \cdot \sin i = \sin \varphi' \cdot \sin i'$; d. h. die kürzeste Linie auf der Kugel ist so beschaffen, dass, wenn man zwei Punkte in ihr mit dem Pole verbindet, die Sinus der Winkel, welche sie mit dem Meridian bildet, sich verhalten umgekehrt wie die Sinus der entsprechenden Poldistanzen. Das ist aber die Grundeigenschaft des grössten Kreises auf der Kugel.

Um die kürzeste Linie auf dem Umdrehungsellipsoid zu finden, schreiben wir die Gleichung der Meridianellipse in folgender Form:

$$\begin{cases} \xi = a \cdot \cos v \\ z = b \cdot \sin v \end{cases}, \quad \text{also wird} \quad f' = \frac{dz}{d\xi} = -\frac{b \cos v}{a \sin v}.$$

Dadurch giebt unsere Gleichung A)

$$u = -\frac{v}{a}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\cos v} \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}{a^2 \cos^2 v - v^2}},$$

welches elliptische Integral sich auf eins der dritten Gattung zurückführen lässt.

Die geodätischen Linien auf den Flächen zweiter Ordnung.

§ 112.

Wir beschränken uns hierbei auf das Ellipsoid, indem wir bemerken, dass diese Untersuchungen auch auf beide Hyperboloide Anwendung finden. Zunächst aber schreiben wir die Gleichung unter der Form:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1.$$

Die Formel 4 des § 110 findet dann sofort Anwendung, da das erste Glied derselben sich integriren lässt. Es ist nämlich:

$$P=\frac{2x}{a},\quad Q=\frac{2y}{b},\quad R=\frac{2z}{c},$$

$$dP=\frac{2dx}{a},\quad dQ=\frac{2dy}{b},\quad dR=\frac{2dz}{c}$$

und unser erstes Glied wird:

$$\frac{\frac{dx\,d^2x}{a}+\frac{dy\,d^2y}{b}+\frac{dz\,d^2z}{c}}{\frac{dx^2}{a}+\frac{dy^2}{b}+\frac{dz^2}{c}}=\frac{1}{2}\,d\lg\left(\frac{dx^2}{a}+\frac{dy^2}{b}+\frac{dz^2}{c}\right).$$

Das Integral wird dann, wenn wir für S^2 seinen Werth

$$4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$

setzen:

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=h\cdot\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\frac{dx^2}{a}+\frac{dy^2}{b}+\frac{dz^2}{c}},$$

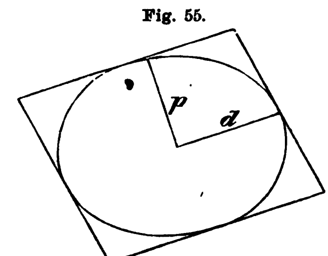
h ist die willkürliche Constante.

Alle diese Betrachtungen gelten wie angedeutet auch für beide Hyperboloide.

Diese Gleichung hat eine einfache geometrische Bedeutung*). Nach § 58 ist ihre linke Seite das Quadrat des reciproken Werthes von p, der Entfernung vom Mittelpunkte der Fläche bis zur Tangentialebene in (x, y, z). Den Bruch rechts kann man, weil der Zähler ds^2 ist, so schreiben:

$$1:\left(\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}{a}+\frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{b}+\frac{\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}{c}\right);$$

Fig. 55.



d. i. wenn A, B, C die Winkel der Tangente eines Normalschnitts mit den drei Axen sind:

$$\frac{1}{\frac{\cos A^2}{a}+\frac{\cos B^2}{b}+\frac{\cos C^2}{c}}.$$

Deshalb wird der Bruch rechts, wie ebenfalls in § 58 dargethan worden ist, gleich dem Quadrate des Radius d (Fig. 55), den man vom Mittelpunkte der Fläche aus, der Tangente parallel, bis zur Fläche zieht. Es ist somit $\frac{1}{p^2}=h\cdot d^2$ oder $d\cdot p=$ Const.; d. h.

*) Dieselbe ist zuerst von Joachimsthal angegeben worden Crelle, Bd. XXVI. D. H.

zieht man eine kürzeste Linie auf einer Fläche zweiten Grades, die einen Mittelpunkt hat, nennt d den Radius der Fläche, welcher der Tangente der Curve parallel ist, und p die Entfernung des Mittelpunktes der Fläche von der Tangentialebene desselben Punktes, so ist das Product dieser beiden Grössen constant. — Dieselbe Eigenschaft gilt auch für die Krümmungscurven, die ja in unserer Differentialgleichung mit inbegriffen sind.

Der Satz vom constanten Inhalte des Parallelogramms über je zwei conjugirten Durchmessern bei den Kegelschnitten mit einem Mittelpunkte entspricht diesem Satze von den Flächen, wie man aus der Figur ersieht: denn d ist hier die halbe Grundlinie, p die halbe Höhe eines solchen Parallelogramms.

Trennen wir jetzt die Krümmungscurven und die kürzesten Linien von einander.

Für die Krümmungscurven gelten folgende Gleichungen:

1) Die soeben gefundene $d \cdot p =$ Const., in welcher nur die ersten Differentiale dx, dy, dz enthalten sind und welche 2) der Gleichung

$$\frac{x}{a} \cdot dx + \frac{y}{b} \cdot dy + \frac{z}{c} \cdot dz = 0$$

unterliegen, weil x, y, z ein Punkt der Fläche sein soll, und 3) der Gleichung der Krümmungscurven

$$\begin{vmatrix} dx & \frac{dx}{a} & \frac{x}{a} \\ dy & \frac{dy}{b} & \frac{y}{b} \\ dz & \frac{dz}{c} & \frac{z}{c} \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$adx(ydz - zdy) + bdy(zdx - xdz) + cdz(xdy - ydx) = 0.$$

Man kann aus den beiden letzten Gleichungen das Verhältniss der Grössen dx, dy, dz, d. h. die Richtungen der Krümmungscurven bestimmen, aus allen drei Gleichungen kann man ferner die Verhältnisse von dx, dy, dz vollständig eliminiren, und erhält dadurch die endliche, integrirte Gleichung der Krümmungscurven, welche durch einen gegebenen Punkt gehen.

Bei den kürzesten Linien dagegen haben wir zwar auch noch die beiden Gleichungen, welche wir vorhin mit 1) und 2) bezeichneten. An die Stelle der Gleichung 3) tritt aber eine Differentialgleichung, welche auch die zweiten Differentiale d^2x, d^2y, d^2z enthält, nämlich die der kürzesten Linien. Hier enthält also das Integral zwei Constanten und die kürzeste Linie ist also durch zwei Punkte erst be-

stimmt. Auf folgendem Wege nun gelangt Jacobi zur Trennung der in der gefundenen Differentialgleichung

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = h \cdot \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}}$$

enthaltenen Variabeln und demnach zur vollständigen Integration, wo für a, b, c geschrieben ist: a^2, b^2, c^2, da das Folgende das Ellipsoid betrifft. Führt man die elliptischen Coordinaten ein:

$$x = a \sin u \Delta', \quad y = b \cos u \cos v, \quad z = c \sin v \Delta,$$

wo $\Delta' = \sqrt{1 - \lambda'^2 \sin^2 v}$ und $\Delta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin u^2}$,

ferner $\lambda^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$ und $\lambda'^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$

ist, so erhält man, wenn man noch folgende Abkürzungen gebraucht:

$$L = \lambda^2 \cos^2 u + \lambda'^2 \cos^2 v, \quad U = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u,$$

$$V = c^2 \cos^2 c + b^2 \sin^2 v,$$

die nachstehenden Ausdrücke:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = L \left\{ \frac{U}{\Delta^2} du^2 + \frac{V}{\Delta'^2} dv^2 \right\},$$

$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} = L \left\{ \frac{1}{\Delta^2} du^2 + \frac{1}{\Delta'^2} dv^2 \right\}$$

und

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{U \cdot V}{a^2 b^2 c^2}.$$

Also wird die zu integrirende Gleichung, wenn wir statt $a^2 b^2 c^2 h$ bloss die Constante h setzen:

$$U \cdot V = h \cdot \frac{\frac{U}{\Delta^2} du^2 + \frac{V}{\Delta'^2} dv^2}{\frac{1}{\Delta^2} du^2 + \frac{1}{\Delta'^2} dv^2},$$

oder wenn man ordnet:

$$\frac{du^2}{\Delta^2} \{UV - hU\} + \frac{dv^2}{\Delta'^2} \{UV - hV\} = 0,$$

oder:

$$\frac{U du^2}{(U - h)\Delta^2} + \frac{V dv^2}{(V - h)\Delta'^2} = 0,$$

worin die Variabeln getrennt sind. Für die Constante h bemerkt man, dass sie zwischen U und V liegen muss; da nun der grösste Werth von U gleich a^2, der kleinste von U gleich c^2 ist, so muss h zwischen a^2 und c^2 liegen. Durch Integration erhalten wir also folgende Gleichung der kürzesten Linien auf einem dreiaxigen Ellipsoide:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}} \sqrt{\frac{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u - h}}$$
$$= \pm \int \frac{dv}{\sqrt{1-\lambda'^2 \sin^2 v}} \sqrt{\frac{c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}{h - c^2 \cos^2 v - b^2 \sin^2 v}} + C.$$

Es sind dies im Allgemeinen Abel'sche Integrale. Sie werden elliptische, wenn $h = b^2$ ist.

§ 113.

Eine Folgerung aus dem Joachimsthal'schen Satze knüpfen wir noch an einen geometrischen Beweis desselben, welcher von der obigen Integration unabhängig ist. Wir müssen zu dem Ende einen Satz aus der Theorie der Flächen zweiter Ordnung anführen.

Wie bei den Ellipsen kann man auch bei den Ellipsoiden von conjugirten Halbmessern sprechen. Gleiches gilt von den Hyperboloiden.

Legt man durch den Mittelpunkt irgend eine Ebene und zieht in derselben zwei conjugirte Halbmesser, so ist jeder der durch den Endpunkt des anderen gezogenen Tangente, also auch der hindurchgelegten Tangentialebene parallel; zieht man nun einen dritten Halbmesser parallel dem Durchschnitte dieser Tangentialebenen, also beiden parallel, so wird dieser ein conjugirter sowohl für den einen als den andern der vorher erhaltenen, für jeden in einer andern Ebene sein. Die durch den Endpunkt des dritten gezogene Tangentialebene ist also beiden ersteren Halbmessern parallel.

Für solche conjugirte Halbmesser gelten nun verschiedene Sätze, deren Beweis auf folgender Grundlage beruht.

Die Gleichung irgend einer Tangentialebene, welche durch Punkt $(x_p y_p z_p)$ geht, war:

$$\frac{x x_p}{a^2} + \frac{y y_p}{b^2} + \frac{z z_p}{c^2} = 1,$$

also die einer Ebene, welche parallel der ersteren durch den Mittelpunkt geht:

$$\frac{x x_p}{a^2} + \frac{y y_p}{b^2} + \frac{z z_p}{c^2} = 0.$$

Habe der Endpunkt eines Halbmessers, der in dieser Ebene liegt, die Coordinaten x_q, y_q, z_q, so ist also:

1) $$\frac{x_p x_q}{a^2} + \frac{y_p y_q}{b^2} + \frac{z_p z_q}{c^2} = 0, \quad p \text{ ungleich } q,$$

und ausserdem:

2) $$\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} + \frac{z_p^2}{c^2} = 1,$$

wo für p auch q gesetzt werden kann. Für unsere drei conjugirten Halbmesser gelten diese beiden Gleichungen für beliebige der Werthe 1, 2, 3 von p und q, wenn man den Endpunkten derselben die Coordinaten bezüglich x_1, x_2, x_3 u. s. w. giebt; sie stellen also sechs Gleichungen vor. Diese unterziehen wir nun einer Umformung.

Es sei:

$$x_p = a\alpha_p, \quad y_p = b\beta_p, \quad z_p = c\gamma_p,$$

dann ist also:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \quad \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1,$$
$$\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0, \quad \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0,$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

Diese sechs Gleichungen sind dieselben, welche die Cosinus der Winkel gaben (§ 5), welche drei aufeinander senkrechte Linien mit drei andern solchen Linien machten.

Nun haben wir aus diesen Gleichungen 16 andere abgeleitet, die also auch hier gelten; in der That kann man beim Ellipsoid die Grössen $\frac{x_1}{a}$ u. s. w. als solche Cosinus betrachten (was allerdings für die Hyperboloide auf imaginäre Grössen führen würde, ohne jedoch diese demgemäss allerdings zu modificirende Betrachtung unanwendbar zu machen).

Diese 16 Gleichungen geben nun, insofern eine aus einer andern nicht durch Vertauschung der Indices oder Buchstaben entsteht, eine Reihe von Sätzen für die conjugirten Halbmesser, von denen wir einige anführen.

Es ist $\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, also: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$.

D. h.: „Projicirt man drei conjugirte Halbmesser auf eine Hauptaxe, so ist die Summe der Quadrate dieser Projection immer dieselbe.“ — Addirt man zu der letzten Gleichung noch

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = b^2, \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = c^2$$

und bezeichnet die conjugirten Halbmesser mit r_1, r_2, r_3, so ist z. B.:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

also:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

d. h.: Die Summe der Quadrate je dreier conjugirter Halbmesser ist constant.

Es ist ferner: $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$,

also:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0,$$

d. h.: „Projicirt man zwei conjugirte Halbmesser auf zwei Hauptaxen, so ist die Summe der Rechtecke aus den Projectionen jedes

der Halbmesser gleich Null, wenn man diesen Rechtecken das entsprechende Vorzeichen giebt. Die Formel $\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3$, oder:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{y_2 z_3 - z_2 y_3}{bc}$$

giebt, wenn man berücksichtigt, dass der Zähler rechts das Parallelogramm aus den Projectionen von r_2 und r_3 auf die yz-Ebene darstellt:

„Projicirt man zwei conjugirte Halbmesser auf eine Hauptebene, den dritten aber auf die in letzterer nicht befindliche Hauptaxe, so verhält sich das Parallelogramm aus den beiden ersten Projectionen zur dritten wie das Rechteck aus den beiden in der entsprechenden Hauptebene enthaltenen Halbaxen zur dritten Halbaxe.“

Endlich hatten wir noch einen Satz, auf den es hier insbesonders ankommt:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Wenn wir diese Determinante aber mit abc multipliciren, so erhalten wir:

$$abc \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha_1, & b\beta_1, & c\gamma_1 \\ a\alpha_2, & b\beta_2, & c\gamma_2 \\ a\alpha_3, & b\beta_3, & c\gamma_3 \end{vmatrix} = \pm abc.$$

Der zweite Ausdruck aber ist offenbar gleich $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$, und stellt also bekanntlich den Inhalt des Parallelepipedons aus den drei conjugirten Halbmessern r_1, r_2, r_3 vor, also:

„Das Parallelepipedon, welches drei conjugirte Halbmesser zu Seiten hat, ist von constantem Inhalt, und gleich dem Parallelepipedon aus den drei Halbaxen.“

Letzteres folgt auch aus Ersterem, da die Halbaxen selbst conjugirte Halbmesser sind. Das doppelte Vorzeichen ist, wie leicht begreiflich, ohne Bedeutung.

§ 114.

Nun kann aber das eben betrachtete Parallelepipedon auch auf folgende Art ausgedrückt werden.

Es seien d und d_1 zwei der conjugirten Halbmesser, φ der Winkel zwischen ihnen, p das Loth vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene, welche d und d_1 parallel ist, so erhalten wir für unser Parallelepipedon den Werth: $pdd_1 \sin\varphi$, und wir haben den Satz,

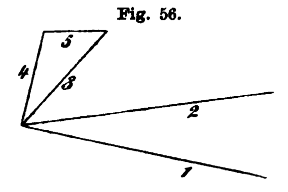
dass für jeden Punkt eines Ellipsoids der Ausdrucks $pdd_1 \sin \varphi$ unveränderlich ist.

Setzen wir nun den Joachimsthal'schen Satz voraus, also $pd =$ const., so kommen wir auf eine neue den geodätischen und den Krümmungslinien auf dem Ellipsoid gemeinschaftliche Eigenschaft: Für jede Krümmungslinie, sowie für jede geodätische bleibt der Ausdruck $d_1 \sin \varphi$ im Verlauf einer solchen Curve constant. Nun ist d ein beliebiger Halbmesser, $d_1 s \sin \varphi$ das vom Endpunkte eines ihm conjugirten auf denselben gefällte Loth. Denken wir uns jetzt den zu d und d_1 conjugirten Halbmesser d_2 gezogen, und durch dessen Endpunkt eine Tangentialebene gelegt, welche also der Ebene dd_1 parallel ist, so sind nach § 58 die Halbmesser d und d_1 zwei conjugirten Halbmessern der zum Endpunkte von d_2 gehörenden Indicatrix, also (§ 54) zwei durch diesen Endpunkt gehenden conjugirten Tangenten parallel. Bewegt sich endlich der Endpunkt von d_2 auf einer Curve fort, so kann d als der Tangente dieser Curve, d_1 als der dieser conjugirten parallel angenommen werden. Es folgt also aus dem Joachimsthal'schen Satze folgender neue Satz:

„Legt man durch den Mittelpunkt eines Ellipsoides eine Ebene, welche der durch einen Punkt einer Krümmungslinie oder geodätischen Linie gelegten Tangentialebene parallel ist, und zieht in dieser Ebene denjenigen Halbmesser, welcher der Tangente an besagter Curve parallel ist, sowie den ihn conjugirten Halbmesser, so ist für die geodätische Linie das Loth vom Endpunkte des letzteren auf den ersteren constant für den ganzen Verlauf der geodätischen Linie. Für die Krümmungslinie ist aber der Winkel zwischen den conjugirten Tangenten, also auch zwischen den Halbmessern d und d_1, ein rechter, also in Bezug auf diese Curve fällt das Loth vom Endpunkte des betreffenden Halbmessers mit diesem Halbmesser selbst zusammen und ist also constant."

Wir wollen jedoch diesen Satz: $d_1 \sin \varphi =$ const. für die geodätische und $d_1 =$ const. für die Krümmungslinie direct beweisen, wo uns dann die fürs ganze Ellipsoid gültige Formel $pdd_1 \sin \varphi =$ const. offenbar einen directen Beweis des Joachimsthal'schen Satzes ergiebt.

Fig. 56.



Sei (1) derjenige Halbmesser des Ellipsoids d (Fig. 56), welcher der Tangente in einem Punkte der betrachteten Curve parallel ist, (3) sein conjugirter Halbmesser d_1 in der Ebene, welche der Tangentialebene parallel ist. Für einen benachbarten Punkt sollen bezüglich (2) und (4) dieselbe Bedeutung haben, und mit δ und δ_1

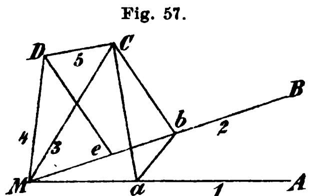
bezeichnet werden. Die Ebenen (1, 3) und (2, 4) schneiden sich in (3), denn sie sind zwei aufeinander folgenden Tangentialebenen parallel, welche sich doch in der (3) parallelen Tangente schneiden müssen, welche die conjugirte der mit (1) parallelen Tangente ist. (5) sei die Tangente, welche durch den Endpunkt von (4) oder δ_1 in der Ebene (2, 4) geht, vermöge der Eigenschaft congirter Halbmesser oder Tangenten ist sie dem Halbmesser (2) oder δ parallel, sie wird aber auch dureh den Endpunkt von d_1 oder (3) gehen, da jede Tangente durch zwei unendlich nahe Punkte der Fläche geht.

A) Das Folgende bezieht sich nun auf die Krümmungslinien. Bei diesen stehen die conjugirten Tangenten, also auch die conjugirten Halbmesser, aufeinander senkrecht, vermöge dessen ist (2), also auch (5) auf (4) senkrecht. Sei nun ε der Winkel zwischen d_1 und δ_1, so ist $\delta_1 = d_1 \cos \varepsilon$, oder, da ε unendlich klein:

$$\delta_1 = d_1 - \frac{\varepsilon^2}{2} d_1.$$

Beim continuirlichen Uebergange von einer Tangentialebene zur andern geben aber nur unendliche Grössen erster Ordnung schliesslich ein endliches Resultat, so dass man hier $\delta_1 = d_1$ setzen kann, d. h. d_1 bleibt constant.

Fig. 57.



B) Gehen wir jetzt zu den geodätischen Linien über, und mögen (Fig. 57) die Linien (1), (2), (3), (4) oder d, δ, d_1, δ_1 jetzt die Längen MA, MB, MC, MD haben, die Tangente (5) gleich DC sein. Die Linien MA und MB sind zwei aufeinander folgenden Tangenten, also Ebene AMB jetzt der Krümmungsebene parallel. Es steht also der Grundeigenschaft der geodätischen Linie wegen (1, 2) oder AMB auf der Tangentialebene also auch auf (2, 4) oder BMD senkrecht und beide Ebenen schneiden sich in MB oder (2). Sei Winkel $CMA = \varphi$, $DMB = \psi$. Fällen wir jetzt von D und C Lothe auf MB, De und Cb, so stehen diese auf der Ebene AMB senkrecht und sind einander gleich, da $DC \# MB$ war, also: $Cb = \delta_1 \cos \psi$. Fällen wir aber auch Loth Ca auf MA, so ist $Ma = d_1 \sin \varphi$. Nun ist Winkel Cba ein rechter, da Cb auf der Ebene MAB, also auch auf ab senkrecht steht, und bezeichnen wir den unendlich kleinen Winkel aCb mit ϑ, so haben wir

$$d_1 \sin \varphi \cos \vartheta = \delta_1 \sin \psi,$$

also ebenso wie oben $d_1 \sin \varphi = \delta_1 \sin \psi$, so dass in diesem Falle $d_1 \sin \varphi$ constant bleibt, womit der Joachimsthal'sche Satz bewiesen ist.

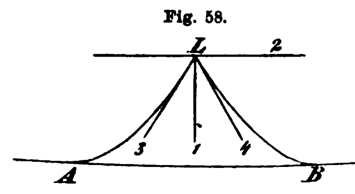
§ 115.

Es sollen jetzt Anwendungen des Joachimsthal'schen Satzes folgen.

Lehrsatz 1. Wenn man aus zwei Punkten A und B (Fig. 58) einer Krümmungslinie des Ellipsoids kürzeste Linien zieht, welche die Krümmungslinie berühren und sich in Punkt L schneiden, so bilden die letzteren mit jeder der durch L gelegten beiden Haupttangenten, also auch mit den durch L gelegten beiden Krümmungslinien gleiche Winkel.

Beweis. Der Ausdruck pd ist für die ganze Krümmungslinie, also für die Punkte A und B, derselbe; dies gilt auch für die Punkte A und B der kürzesten Linie, da wegen der Berührung dieser Linien mit der Krümmungslinie nicht allein p, sondern auch d übereinstimmen. Dieses Product ist also auch dasselbe im ganzen Verlaufe der Linien AL und BL. Für den Punkt L nun giebt es offenbar nur einen Werth von p, es werden also in Punkt L die Werthe auch von d für beide Linien AL und BL übereinstimmen. Seien nun die vier durch L gelegten Tangenten (1) und (2) die Haupttangenten, (3) und (4) die Tangenten der beiden kürzesten Linien. Alle vier liegen in einer Ebene, der Tangentialebene. Legen wir der letzten parallel eine Ebene durch den Mittelpunkt und ziehen in dieser Halbmesser, den vier Tangenten (1), (2), (3), (4) parallel: d_1, d_2, d_3, d_4. Es ist dann $d_3 = d_4$, wie eben bewiesen, d_1 und d_2 aber sind aufeinander senkrechte conjugirte Halbmesser, also die Hauptaxen des Schnittes. Je zwei gleiche Halbmesser machen aber mit den Hauptaxen gleiche Winkel, uud dasselbe gilt von den den Halbmessern parallelen Tangenten.

Fig. 58.



Da die Krümmungslinien übrigens zu zweien symmetrisch liegen, und für solche zwei die Grössen p und d übereinstimmen, so gilt dieser Satz noch, wenn die Punkte A und B auf zwei symmetrischen Krümmungslinien liegen.

Lehrsatz 2. Wenn man durch zwei Nabelpunkte A und B kürzeste Linien legt, die sich in L schneiden, so findet für diese in L der obige Satz ebenfalls statt.

Wir könnten statt des Beweises die Bemerkung machen, dass man die Nabelpunkte als unendlich kleine Krümmungslinien betrachten kann (§ 66), jedoch lässt sich unabhängig davon leicht zeigen, dass für die Punkte A und B der kürzesten Linien die

Grössen p und d dieselben sind, woraus sich dann das Uebrige wie oben ergiebt. Da nämlich die Nabelpunkte symmetrisch liegen, so stimmt nicht p allein, sondern auch der Krümmungsradius ϱ für dieselben überein, für jede durch den Nabelpunkt gezogene Tangente gilt (§ 58) die Formel $\varrho = \frac{d^2}{p}\cdot$ Es sind also auch die Werthe von d für jede Richtung, die durch A und B geht, dieselben.

§ 116.

Es soll hieraus ein Satz abgeleitet werden, der dem Fundamentalsatze aus der Theorie der Kegelschnitte analog ist, dass die Summe bezüglich Differenz der Vectoren constant ist. Diesen Satz leiten wir aus einer einfachen geometrischen Betrachtung ab, die sich ausserordentlich leicht verallgemeinern und auf unsern Fall übertragen lässt, während eine rein analytische Behandlung unseres Theorems grössere Schwierigkeiten machen würde.

Lehrsatz 1. Werden von zwei Punkten in der Ebene f und f' zwei sich in a schneidende Gerade gezogen, deren Summe constant ist, so beschreiben sie eine Curve, deren Tangente mit den Geraden gleiche Winkel macht.

Sei b der a benachbarte Punkt der Curve, also (Fig. 59): $fa + f'a = fb + f'b$. Trägt man daher fa auf fb bis nach α, und $f'b$ auf $f'a$ bis nach β ab, so ist auch $a\beta = b\alpha$. Ferner hat man in den beiden Dreiecken $a\beta b$ und $a\alpha b$ die Linie ab gemeinschaftlich und endlich ist

Fig. 59 a.

$$\sphericalangle\, a\beta b = a\alpha b = R,$$

weil z. B. fa und $f\alpha$ als Radien eines Kreises, $a\alpha$ als der unendlich kleine Bogen oder die Tangente desselben betrachtet werden kann. Demnach bildet ab denselben Winkel mit af' wie mit bf, und da Punkt b unendlich nahe an Punkt a liegt, also die Winkel, welche ab mit af und bf bildet, einander gleich sind, so bildet die Linie ab, oder die Tangente in a mit beiden Strahlen gleiche Winkel. Offenbar ist die Curve, deren Tangente ab ist, die Ellipse. Die Form der hier gewählten Darstellung bezieht sich auf das Folgende.

Lehrsatz 2. (Umkehrung.) Zieht man von zwei Punkten innerhalb einer Curve nach einem Punkte der Curve Strahlen, und bilden diese mit der Tangente dort gleiche Winkel, so ist die Summe der Strahlen constant, vorausgesetzt, dass beide Strahlen auf derselben Seite der Tangente liegen.

Der **Beweis** ist der vorige in umgekehrter Ordnung. Sind a und b zwei unendlich nahe Punkte der Curve, und ist

$$\sphericalangle (ba, af) \quad \text{oder} \quad \sphericalangle (ba, bf) = (ab, af'),$$

so ist in den rechtwinkligen Dreiecken $a\beta b$ und $a\alpha b$: $a\beta = b\alpha$, folglich auch $fa + f'a = fb + f'b = \text{const.}$

Anmerkung. Derselbe Satz und seine Umkehrung gilt auch, wenn man statt der Summe der Strahlen ihre Differenz betrachtet, die Umkehrung erfordert, dass die Strahlen auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen und die Curve ist eine Hyperbel (Fig. 59b).

Fig. 59b.

II) In ganz derselben Weise lässt sich folgender allgemeinere Satz beweisen. Schlingt man um eine Curve (einfach oder doppelt gekrümmte) einen Faden, den man in zweien ihrer Punkte M und N (Fig. 60) oder auch nur in einem, wenn die Curve eine geschlossene ist, befestigt, so dass jedoch der Faden länger ist, als das zwischen den festen Punkten befindliche Curvenstück, und bewegt denselben so, dass er stets gespannt bleibt, so beschreibt seine Spitze eine Curve, deren Tangente mit den beiden geradlinigen Fadenstücken stets gleiche Winkel bildet. Offenbar nämlich (Fig. 60), wenn f_0af' das gespannte Stück des Fadens in einer Lage, fbf'' dasselbe in der nächsten Lage ist, so ist das umgewickelte Stück f_0f gleich dem abgewickelten Stücke $f'f''$, also hat man: $f_0af' = fbf''$ und der Beweis lässt sich genau wie oben führen.

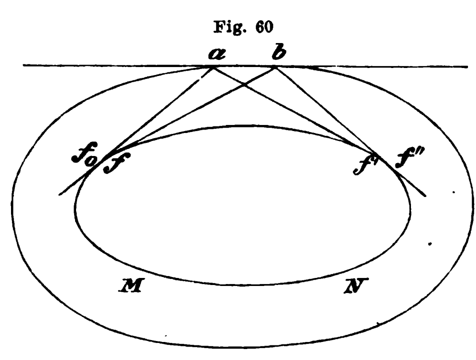


Fig. 60

Nun ist aber auch in jeder Lage des Fadens die Summe:

Bogen $Mf_0 + f_0a + af'$ + Bogen $f'N$ constant oder wenn man Bogen $Mf_0f'N$ abzieht: $f_0a + af'$ — Bogen $f_0f' = fb + bf''$ — Bogen ff'', also constant.

Hieraus ergiebt sich folgende Umkehrung unseres Satzes, die wie oben bewiesen wird:

Wenn von einem beliebigen Punkte a einer Curve (1) zwei Tangenten nach einer andern Curve (2) stets so gezogen werden können, dass dieselben mit der Tangente von (1) in a gleiche Winkel bilden und beide auf derselben Seite liegen, so ist die Summe der beiden

Tangenten vom Schnittpunkte bis zu den Berührungspunkten, vermindert um den dazwischen liegenden Bogen der Curve (2), constant. Dieser Satz findet Anwendung bei den confocalen Kegelschitten.

§ 117.

Die Lehrsätze des vorigen Paragraphen sind nun wegen § 106 noch gültig, wenn die Punkte f, f_1 im Lehrsatz 1 auf einer beliebigen Fläche liegen, und die Strahlen $f_0 a$ und $f' a$ geodätische Linien sind; also: Bestimmt man den Ort eines Punktes auf einer Oberfläche so, dass die Summe seiner kürzesten Entfernungen von zwei festen Punkten der Fläche constant ist, so bilden die geodätischen Linien, welche diese Entfernung ausdrücken, mit der Tangente der Curve gleiche Winkel. Aehnliches gilt, wenn die Differenz der Entfernungen constant ist. Den Beweis erhalten wir aus der Betrachtung, dass immer die vier Punkte a, b, α, β als in einer Ebene der Tangentialebene liegend gedacht werden können, und die Winkel $a\beta b$ und $a\alpha b$ sind nach § 116 Lehrsatz 1 rechte, so dass der Beweis ganz der obige bleibt. Ebenso ist Lehrsatz 2 für diesen Fall noch richtig, wenn die Curve, um die der Faden gespannt ist, auf einer Fläche liegt, und also der Faden, wenn er gespannt ist, geodätische Linien bildet.

Wenden wir dies auf das Ellipsoid mit Hülfe der Sätze des § 115 an, so kommen wir unmittelbar zu folgenden Ergebnissen:

I. Wird um eine Krümmungslinie eines Ellipsoids ein Faden geschlungen und stets gespannt erhalten, so beschreibt seine Spitze eine andere Krümmungslinie. Dieselbe gehört zu dem System der gegebenen, da beide sich nicht schneiden.

II. Die Krümmungslinien sind der Ort für alle Punkte L des Ellipsoids C, deren Entfernungssumme, durch geodätische Linien gemessen, von zwei Nabelpunkten constant ist. In beiden Fällen haben wir nämlich gezeigt (§ 115), dass die Bahn des Punktes L, also ab (Fig. 60), dann in die Richtung einer Haupttangente fallen wird, wenn sie mit den Tangenten beider kürzesten Linien in L gleiche Winkel bildet. Letzteres findet aber nach der oben gemachten Bemerkung in der That statt. Da also L immer in eine Haupttangente fällt, muss dieser Punkt eine Krümmungslinie beschreiben. Dieser Satz II. ist von Michael Roberts zuerst gegeben.

Digression auf einen Satz der ebenen Geometrie.

§ 118.

Aus diesen Betrachtungen lässt sich aber auch ein interessanter Satz aus der Theorie der Kegelschnitte ableiten. Sei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

die Gleichung eines Ellipsoids. Denken wir uns nun c ins Unendliche abnehmend, so wird dies auch mit z geschehen, das Ellipsoid also in einen Theil der (xy)-Ebene sich verwandeln. $\frac{z}{c}=\frac{0}{0}$ wird unbestimmt; sei diese Grösse gleich w, so hat man

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-w^2,$$

also eine Schaar concentrischer Ellipsen, deren äusserste dem Werthe $w=0$ entspricht und diese Ellipse wird den Ebenentheil, in welchen das Ellipsoid verwandelt ist, begrenzen.

Wegen $c=0$ werden dann die Ausdrücke für die Nabelpunkte:

$$z=0, \quad x=\pm\sqrt{a^2-b^2},$$

d. h. aus den Nabelpunkten werden die Brennpunkte der Ellipse, welche unsern Flächenraum begrenzt. Wenden wir nun den Roberts-schen Satz an, so sehen wir, dass aus den Krümmungslinien des Ellipsoids die der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ confocalen Ellipsen entstehen, und wird auf diese wieder der Satz I. des vorigen Paragraphen angewandt, so ergiebt sich, da die geodätischen Linien nun gerade sind, Folgendes: „Schlingt man um eine Ellipse einen Faden, den man in der Ebene der Ellipse stets gespannt hält, so beschreibt die Spitze desselben eine confocale Ellipse.“

Der hier vorliegende Fall, dass nämlich ein für räumliche Gebilde geltender Satz noch gültig bleibt, wenn in einem Grenzfalle diese Gebilde in einer Ebene liegen, obgleich wie hier der Beweis für den letzteren Fall keine Anwendung findet, kommt sehr häufig vor. Beispielsweise erinnern wir an folgende Betrachtung: Es seien zwei Dreiecke gegeben, die in nicht parallelen Ebenen liegen. Dieselben mögen die Eigenschaft haben, dass die drei Verbindungslinien je zweier entsprechender Ecken sich in einem Punkte schneiden. Dann entsteht ein Tetraeder, wovon das eine Dreieck die Grundfläche, das andere einen Querschnitt bildet; beide schneiden sich in einer Geraden, welche somit auch die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Seiten der Dreiecke enthält. Es gilt daher für den Raum folgender

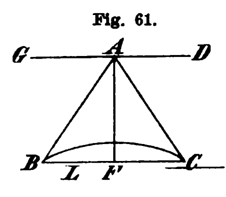
Satz als selbstverständlich: „Schneiden sich die entsprechenden Verbindungslinien der Ecken zweier Dreiecke in einem Punkte, so liegen die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten in einer Geraden.“

Dieser Satz gilt auch, wenn beide Dreiecke in einer Ebene liegen, obgleich die Annahme einer Schnittlinie beider Dreiecksflächen hier keinen Sinn hat.

Dennoch kann unser Beweisverfahren gerechtfertigt werden, wenn die zum Beweise dienenden Grössen, im vorigen Falle z. B. die Tangentialebene durch die Spitze, in diesem die Schnittlinie der Dreiecke sich beim Uebergange in eine Ebene nur continuirlich ändern. Dann gilt das Beweisverfahren für eine unendlich kleine Verschiebung, die zum allgemeinen Falle führt, also auch für den Grenzfall. Letzteres ist bei unsern beiden Betrachtungen der Fall.

Trotzdem kann man verlangen, dass ein planimetrischer Satz auch durch planimetrische Betrachtungen bewiesen werde. Dies kann in unserm Falle für die Ellipse durch den Satz geschehen, dass die vom Schnittpunkte zweier Tangenten einer Ellipse nach den Brennpunkten gezogenen Linien mit diesen Tangenten gleiche Winkel bilden. Indess wollen wir diesen Beweis hier analytisch führen, da der analytische Beweis unsers allgemeinen Satzes für das Ellipsoid sehr grosse Schwierigkeiten machen würde.

Fig. 61.



Wir gehen davon aus, dass (§ 116) beide Fadentheile AB und AC mit der Tangente GD an der Bahn des Punktes (Fig. 61) gleiche Winkel bilden. B und C sind die Berührungspunkte. Seien die Coordinaten von A, B, C bezüglich: (x, y), (u, v), (u_1, v_1). Sei ferner Linie AF der x-Axe parallel. Seien ferner ψ, φ, φ_1 bezüglich die Winkel der Tangenten AD, BA, CA mit der positiven Seite der x-Axe, also

$$\sphericalangle FAD = \psi, \quad FAC = \varphi_1, \quad FAB = -\varphi,$$

also: $$\psi - \varphi_1 = 2R - \psi + \varphi, \qquad \text{d. h.:}$$

I) $$(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi_1)(1 - \operatorname{tg}^2\psi) = 2\operatorname{tg}\psi(1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi_1).$$

Die Gleichung der gegebenen Ellipse sei $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$, und setzen wir:

1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + P.$$

Es ist aber auch

$$2)\quad \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \quad \text{und} \quad 3)\quad \frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} = 1.$$

Dieselben Gleichungen 2) und 3) gelten auch für $(u_1 v_1)$.

Wir setzen ferner:

$$x - u = p, \quad y - v = q, \quad x - u_1 = p_1, \quad y - v_1 = q_1,$$

und erhalten:

$$4) \quad \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = P, \qquad 5) \quad \frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = P.$$

Diese beiden Gleichungen geben, wenn man erst q und dann p eliminirt:

$$(P + 1)p^2 - 2Pxp - P(a^2 - x^2) = 0,$$
$$(P + 1)q^2 - 2Pyq - P(b^2 - y^2) = 0;$$

sind pp_1, qq_1 bezüglich die Wurzeln dieser Gleichungen, so ist:

$$p + p_1 = \frac{2Px}{P+1}, \quad pp_1 = -\frac{P(a^2 - x^2)}{P+1},$$
$$q + q_1 = \frac{2Py}{P+1}, \quad qq_1 = -\frac{P(b^2 - y^2)}{P+1}.$$

Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen

$$q = \left(P - \frac{xp}{a^2}\right)\frac{b^2}{y}, \qquad q_1 = \left(P - \frac{xp_1}{a^2}\right)\frac{b^2}{y} \quad \text{noch:}$$

$$pq_1 = \frac{b^2}{y}\left(Pp - \frac{xpp_1}{a^2}\right), \quad qp_1 = \frac{b^2}{y}\left(Pp_1 - \frac{xpp_1}{a^2}\right),$$

$$pq_1 + qp_1 = \frac{2Pxy}{P+1};$$

nun ist:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{q}{p}, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{q_1}{p_1}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{dy}{dx}.$$

Die Gleichung I) giebt dann:

$$2\frac{dy}{dx}(qq_1 - pp_1) = \left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right](pq_1 + qp_1),$$

oder:

$$\text{II)} \qquad (a^2 - b^2 + y^2 - x^2)\frac{dy}{dx} + \left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]xy = 0.$$

Diese Gleichung giebt die Curve, welche der Punkt Δ beschreibt. Setzen wir $x^2 = s$, $y^2 = t$, so erhalten wir:

$$\frac{dt}{ds}(t - s + a^2 - b^2) + t - \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 s = 0,$$

eine Gleichung, welche in Bezug auf die Variablen linear, in Bezug auf den Differentialquotienten quadratisch ist. Für solche hatten wir schon früher eine Methode angeführt, die wir auch hier anwenden. Wir setzen $\frac{dt}{ds} = w$ und differentiiren, indem wir dt durch wds ersetzen, also:

$$dw(t - s + a^2 - b^2) + w(w - 1)ds + wds - 2wsdw - w^2ds = 0,$$

oder $dw = 0$, w also constant.

Das Integral ergiebt sich also aus Gleichung II), wenn man für $\frac{dy}{dx}$ die willkürliche Constante w setzt, und s und t mit x^2 und y^2 vertauscht, also:

$$w(y^2 - x^2 + a^2 - b^2) + y^2 - w^2 x^2 = 0,$$

d. h.: $$(w + 1)y^2 - w(w + 1)x^2 + (a^2 - b^2)w = 0;$$

vertauscht man w mit $- v$, so erhält man:

$$\frac{1 - v}{(a^2 - b^2)v} y^2 + \frac{(1 - v)x^2}{a^2 - b^2} = 1.$$

Dies ist eine Ellipse, deren Halbaxen α und β sein mögen, also:

$$\alpha^2 = \frac{a^2 - b^2}{1 - v}, \quad \beta^2 = v\alpha^2, \quad \text{also:} \quad \alpha^2 - \beta^2 = a^2 - b^2.$$

Dies aber ist die Bedingung, dass die Ellipse, welche Punkt A beschreibt, der gegebenen Ellipse confocal sei.

Die partiellen Differentialgleichungen der Flächen.

§ 119.

Aus der Entstehungsart gewisser Gattungen von Flächen lässt sich eine partielle Differentialgleichung herleiten, welche eine solche Gattung vollständig darstellt.

Aufgabe 1. Eine partielle Differentialgleichung für sämmtliche Cylinderflächen abzuleiten.

Dieselben entstehen durch Bewegung einer Geraden, wobei diese immer sich selbst parallel bleibt. Die Gleichungen einer solchen Geraden sind $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$; dass sie sich selbst parallel bleibt bedingt, dass die Factoren a und b von z für die verschiedenen Lagen der Linie a constant bleiben und nur α und β sich ändern können. Das Gesetz, nach dem dies geschieht, wird durch eine Gleichung zwischen α und β ausgedrückt, also $\beta = \varphi(\alpha)$, wo φ eine gegebene Function ist; mittelst dieser Gleichung und der beiden der Erzeugungslinie können wir aber α und β eliminiren und erhalten als allgemeine Gleichung des Cylinders den Ausdruck

$$y - bz = \varphi(x - az).$$

Die Form dieser Gleichung lässt sich allerdings noch mannigfach umwandeln. Aus dieser Gleichung und ihren partiellen Differentialgleichungen nach x und y lässt sich nun die Function φ eliminiren. Wir erhalten, wenn wir $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ setzen:

$$- bp = \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad \text{d. i.} \quad = \varphi'(\alpha)(1 - ap)$$

und $$1 - bq = \varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y} = -\varphi'(\alpha)aq;$$

dividiren wir die erste durch die zweite, so fällt die willkürliche Function fort, und es ergiebt sich:

$$\frac{+bp}{1-bq} = \frac{1-ap}{+aq} \quad \text{oder} \quad ap + bq = 1.$$

Das Integral dieser partiellen Differentialgleichung ist die vorher gefundene endliche Gleichung.

Dass die gefundene Differentialgleichung wirklich eine Cylinderfläche darstellt, sieht man daraus, dass sie der Ausdruck dafür ist, dass die Tangentialebene $\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$ parallel der Geraden $\zeta = \frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b}$ ist; sie drückt also aus, dass jede Tangentialebene einer Cylinderfläche den Erzeugungslinien parallel ist; da aber jedesmal die Tangentialebene durch einen Punkt einer solchen Geraden geht, so folgt die bekannte Eigenschaft des Cylinders, dass jede Tangentialebene die ganze Erzeugungslinie des Cylinders enthält.

Aufgabe 2. Die allgemeine Gleichung der Kegelflächen aufzustellen.

Eine Kegelfläche entsteht, wenn eine gerade Linie durch einen Punkt geht und sich sonst nach einem beliebigen Gesetze bewegt. Die Coordinaten des festen Punktes, den man den Scheitel nennt, mögen α, β, γ sein. Dann ist die Gleichung der sich bewegenden Geraden $\begin{cases} z - \gamma = a(x - \alpha) \\ z - \gamma = b(y - \beta) \end{cases}$.

Hierin muss a eine Function von b sein, also:

$$\text{A)} \quad \frac{z-\gamma}{y-\beta} = F\left(\frac{z-\gamma}{x-\alpha}\right), \quad \text{oder} \quad f\left(\frac{z-\gamma}{x-\alpha}, \frac{z-\gamma}{y-\beta}\right) = 0.$$

Denn soll z. B. die gerade Linie immer durch die Curve $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ gehen, so muss man die beiden Gleichungen:

$$\varphi\left(\alpha + \frac{z-\gamma}{a}, \ \beta + \frac{z-\gamma}{b}, \ z\right) = 0$$

und $$\psi\left(\alpha + \frac{z-\gamma}{a}, \ \beta + \frac{z-\gamma}{b}, \ z\right) = 0$$

haben, aus denen man durch Elimination von z offenbar eine Gleichung zwischen a und b bekommen wird: $\Theta(a, b) = 0$. Ist statt der obigen Curve eine Fläche gegeben, welche die Kegelfläche immer umhüllen soll, so muss jede Erzeugungslinie eine Tangente der gegebenen Fläche in einer ihrer Lagen sein, woraus sich ebenfalls eine Gleichung zwischen a und b ableiten lässt. Ist der gegebene

Punkt α, β, γ der Anfangspunkt, so hat man einfacher aus Gleichung A): $f\left(\frac{z}{x}, \frac{z}{y}\right) = 0$, d. h. in diesem Falle lässt sich die Gleichung des Kegels immer so schreiben, dass sie homogen ist in Beziehung auf x, y, z; und umgekehrt: Jede Gleichung, welche homogen ist in Beziehung auf die drei Coordinaten x, y, z, drückt eine Kegelfläche aus, deren Scheitel der Anfangspunkt der Coordinaten ist.

Um die partielle Differentialgleichung aus der endlichen, mit einer willkürlichen Function behafteten abzuleiten, schreiben wir diese in folgender Form, die wir ihr offenbar auch geben können:

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = F(c), \quad c = \frac{y-\beta}{z-\gamma}.$$

Differentiiren wir diese Gleichung nacheinander nach x und y, so wird sie:

$$\frac{z-\gamma-(x-\alpha)p}{(z-\gamma)^2} = -F'(c)\frac{(y-\beta)p}{(z-\gamma)^2}$$

oder $$z-\gamma-(x-\alpha)p = -F'(c)(y-\beta)p$$

und $$-(x-\alpha)q = F'(c)\{z-\gamma-(y-\beta)q\};$$

also durch Division

$$\frac{z-\gamma-(x-\alpha)p}{(x-\alpha)q} = \frac{(y-\beta)q}{z-\gamma-(y-\beta)p}$$

oder $$(z-\gamma)^2-(z-\gamma)(y-\beta)q-(z-\gamma)(x-\alpha)p = 0$$

oder $$(x-\alpha)p+(y-\beta)q = z-\gamma.$$

Die geometrische Interpretation dieser Gleichung ist, dass jede Tangentialebene der Fläche durch den Scheitel geht.

Aufgabe 3. Die allgemeine Gleichung für die Rotationsflächen zu bestimmen.

Seien die Gleichungen der rotirenden Curve:

$$1)\quad f(x,y,z) = 0, \qquad 2)\quad \varphi(x,y,z) = 0.$$

Nehmen wir zunächst an, die Rotationsaxe ginge durch den Anfangspunkt, dann sind ihre Gleichungen $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Jeder Punkt der rotirenden Curve beschreibt einen Kreis, der auf der Rotationsaxe senkrecht ist, die Gleichung der Ebene dieses Kreises ist also:

$$3)\qquad ax+by+cz = d,$$

und da der Kreis jedenfalls als Durchschnitt dieser Ebene mit einer Kugel betrachtet werden kann, deren Mittelpunkt wir in die Ro-

tationsaxe und zwar in den Anfangspunkt legen dürfen, so erfüllt der Kreis auch die Gleichung:

4) $$x^2 + y^2 + z^2 = e.$$

Endlich aber ist dieser Kreis der Bedingung unterworfen, dass er durch die Curve 1) 2) geht. Also wenn man aus den Gleichungen 1) 2) 3) 4) x, y, z eliminirt, so erhält man die Bedingungsgleichung für die Rotationsfläche in der Gestalt: $e = F(d)$ oder:

$$x^2 + y^2 + z^2 = F(ax + by + cz).$$

Heben wir nun, um die allgemeine Form der Gleichung zu haben, die Beschränkung auf, dass die Rotationsaxe durch den Anfangspunkt geht, und seien α, β, γ die Coordinaten irgend eines Punktes der Rotationsaxe, so wird unsere Gleichung:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = F\{a(x-\alpha) + b(y-\beta) + c(z-\gamma)\}.$$

Bilden wir von dieser Gleichung, um F zu eliminiren, die Differentialquotienten:

$$(x-\alpha) + p(z-\gamma) = \frac{1}{2}(a + cp)F',$$

$$(y-\beta) + p(z-\gamma) + \frac{1}{2}(b + cq)F',$$

also, wenn F' eliminirt wird:

$$(b + cq)\{x - \alpha + p(z-\gamma)\} = (a + cp)\{y - \beta + q(z-\gamma)\}$$

oder:

$$p\{c(y-\beta) - b(z-\gamma)\} + q\{a(z-\gamma) - c(x-\alpha)\}$$
$$= b(x-\alpha) - a(y-\beta).$$

Liegt der Anfangspunkt in der Axe, so ist $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Ein Conoid heisst diejenige geradlinige Fläche, deren Erzeugungslinie sich immer parallel einer gegebenen Ebene bewegt, derart, dass sie immer durch eine Gerade und eine Curve geht, welche ebenfalls gegeben sind.

Aufgabe 4. Die allgemeine Gleichung eines Conoid zu finden.

Wir nehmen der Einfachheit wegen die gegebene Ebene als die der (x, y). Die Gleichungen der gegebenen Curve seien:

$$1)\ f(x, y, z) = 0, \qquad 2)\ \varphi(x, y, z) = 0.$$

Dann werden die Gleichungen der Erzeugungslinie sein:

$$3)\ z = c, \qquad 4)\ y = ax + b.$$

Sei der Schnittpunkt der gegebenen Geraden mit der xy-Ebene Anfangspunkt, so sind die Gleichungen dieser Geraden:

$$5)\ y = \alpha z, \qquad 6)\ x = \beta z.$$

Da die Erzeugungslinie und die gegebene Gerade immer einen Punkt gemein haben, so erhält man eine der Constanten, in 3) und 4) wenn man aus den Gleichungen 3) bis 6) x, y, z eliminirt, und zwar ist:

$$(a - \alpha\beta)\, c = b.$$

Die Gleichung 4) ist also:

$$y = ax + c(\alpha - a\beta).$$

Oder wenn man hier wieder c durch z ersetzt:

$$a = \frac{y - \alpha z}{x - \beta z} \quad \text{und} \quad z = c.$$

Um die Gleichung des Conoid zu finden, ist nun aus diesen beiden Gleichungen und 1) und 2) x, y, z zu eliminiren, was eine Gleichung $c = F(a)$ giebt, d. h.:

$$z = F\left(\frac{y - \alpha z}{x - \beta z}\right).$$

Bilden wir wieder die Differentialquotienten, so erhalten wir:

$$p = \frac{-(\alpha p(x - \beta z) + (1 - \beta p)(y - \alpha z))F'}{(x - \beta z)^2},$$

$$q = \frac{((1 - \alpha q)(x - \beta z) + \beta q(y - \alpha z))F'}{(x - \beta z)^2}.$$

Nach Elimination von F' erhalten wir dann die partielle Differentialgleichung:

$$-q\{\alpha p(x - \beta z) + (1 - \beta p)(y - \alpha z)\}$$
$$= p\{(1 - \alpha q)(x - \beta z) + \beta q(y - \alpha z)\},$$

oder $$p(x - \beta z) + q(x - \alpha z) = 0.$$

Ist die gegebene Gerade auf der xy-Ebene senkrecht, so hat man: $\alpha = \beta = 0$, also: $xp + yq = 0$.

Die hier gegebenen partiellen Differentialgleichungen sind alle von der ersten Ordnung und linear, d. h. sie enthalten p und q nur in der ersten Potenz.

Schon früher aber fanden wir für die abwickelbaren Flächen die Gleichung $rt - s^2 = 0$, die also nicht linear und von zweiter Ordnung ist.

§ 120.

Ueber die Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Es handelt sich hierbei darum, eine Gleichung folgender Form zu integriren: $Ap + Bq = C$, worin A, B, C im Allgemeinen Functionen von x, y, z sein werden. Das Integral dieser Gleichung sei

$\varphi(x, y, z) = 0$; es fragt sich also, wie φ beschaffen sein muss, damit die gegebene Gleichung stattfinde. Es folgt zunächst dass, wie bekannt

$$p = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \quad \text{und} \quad q = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$$

ist, welche Werthe in die gegebene Gleichung substituirt, die Gleichuug

$$A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

identisch erfüllen müssen. Mit dieser mehr symmetrischen Form der vorgelegten Aufgabe beschäftigen wir uns nun, und stellen uns sogar die allgemeinere Frage:

Wie lautet das Integral der Gleichung

$$A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\frac{\partial \varphi}{\partial z} + D\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \cdots = 0,$$

wo die Grössen $A, B, C, D \cdots$ Functionen sind von $x, y, z, u \cdots$, aber die Function φ nicht enthalten?

1) Nehmen wir zunächst den einfachsten Fall, nämlich die Gleichung $A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ auf, worin also A und B bloss x und y enthalten, dabei aber von Null verschieden sein sollen.

a) Es seien A und B constant. Man löse zunächst die gewöhnliche Differentialgleichung $dx : dy = A : B$. Das Integral derselben ist $Bx - Ay = \text{Const.}$ Wir wollen den Ausdruck $Bx - Ay = \eta$, also $y = \frac{Bx - \eta}{A}$ setzen. Dadurch wird

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(x, \frac{Bx - \eta}{A}\right) = \psi(x, \eta),$$

folglich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot B$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot A.$$

Diese beiden Werthe geben, in die vorgelegte Differentialgleichung eingesetzt: $A\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ oder, da A nicht Null sein soll, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$, also ψ enthält x gar nicht, sondern nur η. Wir haben somit die allgemeinste Lösung gefunden. Die Function $\varphi(x, y)$, welche der vorgelegten partiellen Differentialgleichung genügt, ist eine solche, dass in ihr nur die Verbindung $Bx - Ay$ vorkommt; denn es ist gefunden $\varphi = \psi(Bx - Ay)$.

b) Jetzt wollen wir annehmen, dass A und B nicht mehr

constant sind, sondern x und y enthalten. Wenn wir jetzt wieder dieselbe Differentialgleichung aufstellen: $Bdx - Ady = 0$, so sind wir nicht mehr im Stande, diese Gleichung so unmittelbar zu integriren, da die linke Seite im Allgemeinen nicht ein genaues Differential ist. Aber das wissen wir, dass wir jedesmal einen Factor finden können, mit dem multiplicirt die linke Seite ein genaues Differential wird. Dieser Factor sei μ, dann setzen wir: $\mu(Bdx - Ady) = d\eta$, wo die linke Seite alsdann das genaue Differential der Function η ist; dadurch erhalten wir also

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \mu B, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\mu A.$$

η enthält sowohl y als x; wir können daher jetzt das y durch η und x ausdrücken und dadurch die Function $\varphi(x, y)$ uns verwandelt denken in die Function $\psi(\eta, x)$. Hiernach wird

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \mu B, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \mu A,$$

und wenn wir dies in die vorgelegte Gleichung einsetzen, so wird sie zu folgender: $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$, d. h. die Function ψ enthält nur η. Wir haben also jetzt folgende Regel: Um die partielle Differentialgleichung $A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ zu integriren, in welcher A und B Functionen von x und y sind, aber φ nicht enthalten, integrire man zuerst die gewöhnliche Differentialgleichung $dx : dy = A : B$. Gesetzt, es sei das Integral dieser Gleichung der Ausdruck $\eta = c$, wo c die willkürliche Constante ist, und η eine Function von x und y, dann ist φ irgend eine beliebige Function von η.

2) Ehe wir zu der Integration einer partiellen Differentialgleichung zwischen drei Variabeln übergehen, schicken wir Folgendes voraus.

Das System zweier simultanen Differentialgleichungen

$$dx : dy : dz = A : B : C,$$

worin A, B, C Functionen von x, y, z sind, wird immer integrirt durch zwei Gleichungen zwischen x, y, z, die zwei willkürliche Constanten enthalten. — Denn schreibt man die Gleichungen so:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} = \beta \\ \frac{dz}{dx} = \frac{C}{A} = \gamma \end{cases}$$

und differentiirt die zweite Gleichung noch einmal nach x, wodurch

man bekommt: $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial y}\beta + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\gamma = \gamma_0$, so kann man, weil γ_0 auch x, y und z enthält, aus dieser Gleichung $\frac{d^2 z}{dx^2} = \gamma_0$ und aus der Gleichung $\frac{dz}{dx} = \gamma$ sich y eliminirt denken, wodurch man eine Gleichung zwischen x, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$, also eine Gleichung von der Form $F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}\right) = 0$ erhält. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen den beiden Variabeln x und z, bei deren Integration immer zwei willkürliche Constanten auftreten. Diese beiden Constanten seien c und c_1. Wir haben also auf diese Weise z gefunden als Function von x, nämlich: $z = \Theta(x, c, c_1)$. Wir können nun auch y finden, und zwar ohne weitere Integration. Setzt man nämlich den für z gefundenen Werth in die Gleichung $\frac{dz}{dx} = \gamma$ ein, so wird sie $\frac{d\Theta(x, c_1, c_1)}{dx} = \gamma_1$, und in dieser Gleichung kommt links nur noch x, c, c_1 und rechts nur noch x und y vor. Zu der Gleichung $z = \Theta(x, c, c_1)$ haben wir also jetzt noch die Gleichung $\vartheta(x, y, c, c_1) = 0$ gefunden. Also ist erwiesen, dass zwei gleichzeitige gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung durch zwei Gleichungen integrirt werden, welche zwei willkürliche Constanten enthalten. Wir nehmen nun an, dass diese beiden Gleichungen nach den willkürlichen Constanten aufgelöst werden, d. h. dass sie auf folgende zwei gebracht werden:

$$c = f(x, y, z), \quad c_1 = f_1(x, y, z).$$

Durch zwei solche Gleichungen lässt sich also jedesmal das System $dx : dy : dz = A : B : C$ lösen. — Wir können noch fragen: Welches ist das Kriterium, damit die beiden Gleichungen

$$c = f(x, y, z), \quad c_1 = f_1(x, y, z)$$

in der That dem vorgelegten Systeme $dx : dy : dz = A : B : C$ genügen? Aus der ersten Gleichung finden wir

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

wodurch also die willkürliche Constante verschwunden ist. Soll diese Function f dem vorgelegten Systeme genügen, so muss man also auch die Gleichung

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} A + \frac{\partial f}{\partial y} B + \frac{\partial f}{\partial z} C$$

haben, und zwar muss dies, weil auch A, B, C keine willkürlichen

Constanten enthalten, eine identische Gleichung sein. Das Kriterium besteht also darin, dass man identisch die Gleichung hat

$$0 = f'(x) \cdot A + f'(y) \cdot B + f'(z) \cdot C$$

und ebenso

$$0 = f_1'(x) \cdot A + f_1'(y) \cdot B + f_1'(z) \cdot C.$$

Noch wollen wir bemerken, dass, wenn auch in den Functionen f und f_1 von den Grössen x, y, z einige fehlen, z. B. in f die Veränderliche z oder auch z und y, es doch unmöglich ist, dass in beiden f und f_1 etwa y und z gleichzeitig fehlten. Wenn nämlich dies der Fall wäre, müsste $A = 0$ sein. Wir wollen daher annehmen, dass in f von den drei Grössen x, y, z wenigstens die Grösse y, und in f_1 wenigstens die Grösse z vorkommt. Wir bezeichnen daher auch $f(x, y, z)$ durch η, und $f_1(x, y, z)$ durch ζ, sodass wir haben $\eta = c$, $\zeta = c_1$.

Dies vorausgeschickt, stellen wir uns vor, dass man behufs der Lösung der Gleichung

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

in welcher A, B, C Functionen von x, y, z sind, aber φ nicht enthalten, y und z durch x, η und ζ ausgedrückt habe. Dadurch geht die Integralfunction $\varphi(x, y, z)$ über in $\psi(x, \eta, \zeta)$, also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ in } \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot f'(x) + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \cdot f_1'(x),$$

ferner

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ in } \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot f'(y) + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \cdot f_1'(y),$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{ in } \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot f'(z) + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \cdot f_1'(z).$$

Multipliciren wir diese drei Gleichungen der Reihe nach mit A, B, C und addiren sie, so wird die Summe der vorgelegten Gleichungen der beiden oben aufgestellten identischen Gleichungen wegen zu folgender: $0 = \frac{\partial \psi}{\partial x}$; ψ enthält also x nicht, sondern nur η und ζ; d. h. φ ist irgend eine willkürliche Function von f und f_1. Wir haben also die Regel: L i e g t d i e l i n e a r e p a r t i e l l e D i f f e r e n t i a l g l e i c h u n g e r s t e r O r d n u n g $A \frac{\partial z}{\partial x} + B \frac{\partial z}{\partial y} = C$, w o r i n A, B u n d C x, y, z e n t h a l t e n, z u r I n t e g r a t i o n v o r, d. h. soll man die Gleichung zwischen x, y, z finden, die der vorgelegten Gleichung genügt, $\varphi(x, y, z) = 0$, die also die Gleichung

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

identisch erfüllt, so integrire man zuerst das System zweier gewöhnlichen simultanen Differentialgleichungen $dx:dy:dz = A:B:C$ durch die beiden Gleichungen $\begin{cases} f\ (x, y, z) = c \\ f_1(x, y, z) = c_1 \end{cases}$; alsdann giebt jede willkürliche Function zwischen f und f_1, gleich $\varphi(x, y, z)$ gesetzt, oder f als eine willkürliche Function von f_1 angenommen, das Integral der vorgelegten Gleichung.

Auf Functionen mehrerer Variabeln lässt sich ganz dasselbe Verfahren anwenden.

Diese einfache Reduction der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist eine von Lagrange's schönsten Erfindungen, der auch in dieser Weise den Beweis geführt hat.

§ 121.

Es ist vielleicht gut, die Methode, welche zur Auflösung der partiellen linearen Differentialgleichungen führt, noch in einer andern Weise darzustellen. Hier ist zunächst Einiges über die totalen Differentialgleichungen mit mehreren Variabeln voranzuschicken.

1) Seien gegeben $n-1$ Differentialgleichungen mit n Variablen z. B.:

1) $$a dx + b dy + c dz = 0,$$

2) $$a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz = 0,$$

wo a, b, c Functionen von x, y und z sind.

Dieselben sollen integrirt, d. h. es sollen $n-1$ der Variabeln x und y durch eine: z ausgedrückt werden. Dazu sind also $n-1$, in unserem Falle zwei Gleichungen nöthig, die man Integrale nennt. Es ist zunächst klar, dass, wenn man die linken Seiten der Gleichungen durch Substitution auf die Form bringen kann

3) $$a dx + b dy + c dz = \alpha df + \beta df_1,$$

4) $$a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz = \alpha_1 df + \beta_1 df_1,$$

die Ausdrücke $f = c$ und $f_1 = c_1$, wo c und c_1 constant sind, Integrale sind; denn setzt man dieselben rechts ein, so verschwinden die linken Seite unserer Gleichungen. Umgekehrt lässt sich aber auch zeigen, dass, wenn Integrale $f = c$ und $f_1 = c_1$ gegeben sind, d. h. wenn diese Ausdrücke die Gleichungen 1 und 2 erfüllen, die linken Seiten sich immer auf die Form 3 und 4 bringen lassen. Denn sei m eine beliebige Function von x, y, z, so wird sich, was auch f und f_1 sei, immer setzen lassen:

5) $$a dx + b dy + c dz = \alpha df + \beta df_1 + \gamma dm,$$

6) $$adx + bdy + cdz = \alpha_1 df + \beta_1 df_1 + \gamma_1 dm.$$

Setzt man nun $f = c$, $f_1 = c_1$, so müssen nach dem Obigen die linken Seiten und die beiden ersten Glieder der rechten verschwinden, und da m nicht constant ist, so wird auch $\gamma = \gamma_1 = 0$ werden. Dieser Beweis lässt sich offenbar anwenden, wenn n eine beliebige Zahl ist, wo die Anzahl der f dann $n - 1$ wird.

2) Sei gegeben die lineare partielle Differentialgleichung:

1) $$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} = e,$$

wo a, b, c, e Functionen von x, y, z, u sind.

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit dem Systeme

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 = e,$$
$$du = p_1 dx + p_2 dy + p_3 dz,$$

denn die letztere Gleichung sagt nur, dass p_1, p_2, p_3 die partiellen Differentialquotienten von u sind. Statt dieser beiden Gleichungen kann man aber auch die eine setzen:

2) $$du - p_1 dx - p_2 dy - \frac{1}{c}(e - ap_1 - bp_2)dz = 0.$$

Die Gleichung 1) oder die ihr identische 2) integriren, heisst nun u durch x, y und z ausdrücken. Es ist aber auch klar, dass, wenn man auf irgend eine Weise u, p_1, p_2 so durch x, y und z darstellen kann, dass diese Werthe, in 2) eingesetzt, die linke Seite gleich Null machen, dass dann p_1, p_2, p_3 die partiellen Differentialquotienten von u sind, denn die Gleichung 2) giebt ja dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = p_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = p_3.$$

Nun lässt sich die linke Seite von 2) folgendermassen schreiben:

3) $$\frac{1}{c}\{cdu - edz + p_1(adz - cdx) + p_2(bdz - cdy)\} = 0.$$

Integriren wir nun die drei totalen Differentialgleichungen

4) $$cdu - edz = 0, \quad adz - cdx = 0, \quad bdz - cdy = 0,$$

und seien die Integrale

$$f = c, \quad f_1 = c_1, \quad f_2 = c_2,$$

so kann man nach dem ersten Theile unseres Satzes schreiben:

$$cdu - edz = \alpha df + \beta df_1 + \gamma df_2,$$
$$adz - cdx = \alpha_1 df + \beta_1 df_1 + \gamma_1 df_2,$$
$$bdz - cdy = \alpha_2 df + \beta_2 df_1 + \gamma_2 df_2,$$

wo die Ausdrücke $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1 \cdots x, y, z$ und u enthalten.

Dadurch nimmt aber die linke Seite von 3) die Gestalt an:

$$\frac{1}{c}((\alpha+\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2)df+(\beta+\beta_1 p_1+\beta_2 p_2)df_1+(\gamma+\gamma_1 p_1+\gamma_2 p_2))df_2$$

oder

$$Adf+Bdf_1+Cdf_2$$

und es fragt sich, wann dieser Ausdruck verschwindet. Einmal findet dies statt, wenn f, f_1, f_2 gleich Constanten gesetzt werden, dies giebt aber zunächst kein Integral unserer partiellen Differentialgleichungen, weil diese Gleichungen x, y, z in u, also nicht u in x, y, z ergeben. Setzt man aber f gleich einer beliebigen Function von f_1 und f_2, also $f=\varphi(f_1, f_2)$, so wird die linke Seite unserer Gleichung

$$\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial f}+B\right)df+\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial f_1}+C\right)df_1.$$

Fügt man also zu der Gleichung $f=\varphi(f_1, f_2)$ noch die beiden folgenden hinzu

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial f}+B=0,\quad A\frac{\partial\varphi}{\partial f_1}+C=0,$$

so verschwindet die linke Seite von 2) oder 3) und die Gleichung ist also integrirt. Die beiden letzten der drei Integralgleichungen enthalten p_1 und p_2, dienen also dazu, diese Grössen zu bestimmen, sie sind aber überflüssig, da nach der oben gemachten Bemerkung sich ohnehin

$$\frac{\partial u}{\partial x}=p_1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=p_2$$

ergeben; es ist also die Gleichung $f=\varphi(f_1, f_2)$ oder wie man sie auch schreiben kann $\varphi(f, f_1, f_2)=0$, das einzige Integral, und die Integration unserer partiellen Differentialgleichung wird folgendermassen bewirkt.

Man integrire die Gleichungen 4) d. h. die Gleichungen:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c}=\frac{du}{e};$$

sind $f=C$, $f_1=C_1$, $f_2=C_2$ die Integrale, so ist $\psi(f, f_1, f_2)=0$, wo ψ eine willkürliche Function ist, das Integral der partiellen Differentialgleichung.

§ 122.

Wir wollen nun noch an einigen Beispielen zeigen, wie man aus der Differentialgleichung einer Fläche ihre endliche, mit einer willkürlichen Function behaftete, finden kann.

1) Die Gleichung der Cylinderflächen $ap+bq=1$ wird integrirt, indem man das System folgender Gleichungen integrirt:

$$dx:dy:dz = a:b:1 \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{a}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{b}$$

oder $adz - dx = 0$, $bdz - dy = 0$, woraus folgt $az - x = c$, $bz - y = c_1$; also ist das Integral der vorgelegten Gleichung folgendes:

$$az - x = \varphi(bz - y);$$

es ist dieselbe Gleichung wie die, von welcher wir oben ausgingen, als wir die partielle Differentialgleichung herleiteten.

2) Die Gleichung der Kegelflächen

$$(x - a)p + (y - b)q = z - c$$

liefert folgendes System behufs der Integration:

$$dx:dy:dz = x - a:y - b:z - c \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{z - c} = \frac{dx}{x - a} = \frac{dy}{y - b},$$

also integrirt

$$l(z - c) - l(x - a) = lc_1, \quad l(z - c) - l(y - b) = lc_2$$

und demnach, wenn man zu den Numeris übergeht:

$$\frac{z - c}{x - a} = c_1, \quad \frac{z - c}{y - b} = c_2, \quad \text{also} \quad \frac{z - c}{x - a} = \varphi\left(\frac{z - c}{y - b}\right).$$

3) Die Gleichung $p - q = 0$ giebt

$$dx:dy:dz = 1:-1:0,$$

also $$dy = -dx, \quad dz = 0;$$

folglich $$y + x = c, \quad z = c_1 \quad \text{oder} \quad z = \varphi(x + y).$$

4) Die Gleichung der Rotationsflächen ist, wenn wir $\alpha = \beta = \gamma = 0$ setzen:

$$(cy - bz)p + (az - cx)q = bx - ay$$

und giebt folgendes System

$$dx:dy:dz = cy - bz:az - cx:bx - ay.$$

Dies schreiben wir behufs der Integration so:

$$\lambda dx = cy - bz, \quad \lambda dy = az - cx, \quad \lambda dz = bx - ay.$$

Hieraus können wir folgende beiden Gleichungen ableiten:

$$adx + bdy + cdz = 0, \quad xdx + ydy + zdz = 0,$$

indem wir nämlich die drei Gleichungen der Reihe nach mit a, b, c resp. mit x, y, z multipliciren, und dann addiren. Diese letzten beiden Gleichungen sind aber sofort integrabel; sie geben:

$$ax + by + cz = c_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2,$$

also ist das Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, d. h. die endliche Gleichung der Rotationsflächen, folgende:

$$ax + by + cz = \varphi(x^2 + y^2 + z^2).$$

5) Die Differentialgleichung des Conoids ist:

$$p(x - \beta z) + q(y - \alpha z) = 0,$$

die Hülfsgleichungen also werden:

$$dx : dy = x - \beta z : y - \alpha z, \quad dz = 0.$$

Die Integrale sind also:

$$z = c \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{x - \beta c} = \int \frac{dy}{y - \alpha c}$$

oder:

$$\lg(y - \alpha c) - \lg(x - \beta c) = c_1,$$

also, wenn man hier für c wieder z setzt und die Constante ändert:

$$\frac{y - \alpha z}{x - \beta z} = h, \quad z = c,$$

woraus sich dann ergiebt:

$$z = F\left(\frac{y - \alpha z}{x - \beta z}\right).$$

6) Wie man sich bei partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnungen und Grade verhalten kann, wollen wir an dem Beispiel der abwickelbaren Flächen zeigen. Die Gleichung derselben war: $rt - s^2 = 0$. Wir schreiben sie in folgender Form:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Denken wir uns q als gegebene Function, so finden wir p nach den obigen Regeln, indem wir das System folgender gewöhnlicher Differentialgleichungen integriren: $dx : dy : dp = \frac{\partial q}{\partial y} : -\frac{\partial q}{\partial x} : 0$. Hieraus folgt zunächst $dp = 0$ oder $p = c$. Ferner ist $\frac{\partial q}{\partial y} dy + \frac{\partial q}{\partial x} dx$, d. h. das vollständige Differential von q oder $dq = 0$, folglich $q = c_1$. Dass diese beiden Gleichungen wirklich der vorgelegten Gleichung genügen, sieht man sofort; es genügt auch die Gleichung $p = \varphi(q)$, denn differentiirt man diese partiell nach x und dann nach y, so erhält man $r = \varphi'(q) \cdot s$ resp. $s = \varphi'(q) \cdot t$, und durch Elimination von $\varphi'(q)$ die vorgelegte Differentialgleichung. Es ist also p eine willkürliche Function von q, oder, wie wir schreiben wollen: $q = f(p)$. Um hieraus die gesuchte Fläche zu erkennen, verfahren wir so: Es ist $dz = p \cdot dx + q \cdot dy$, also mit Einsetzung des Werthes von q: $dz = p \cdot dx + f(p) \cdot dy$. Integrirt man diese Gleichung, und zwar rechts theilweise, so hat man $z = p \cdot x - \int x dp + y \cdot f(p) - \int y f'(p) dp$ oder $z = p \cdot x + f(p) \cdot y - \int \{x + yf'(p)\} dp$. Es muss sich also, wenn man das Integral soll ausführen können, $x + y \cdot f'(p)$ in eine Function von p verwandeln lassen; wir setzen $x + y \cdot f'(p) = \psi'(p)$.

Es wird somit $z = px + f(p) \cdot y - \psi(p)$. Diese beiden Gleichungen ergeben unsere Auflösung. Schreiben wir sie in folgender Gestalt: $z = px + f(p) \cdot y - \psi(p)$, $0 = x' + f'(p) \cdot y - \psi'(p)$, so übersehen wir leicht, dass die zweite das partielle Differential der ersten nach p ist. Wenn wir also, um die Gleichung der gesuchten Fläche zu finden, p aus den beiden Gleichungen eliminiren, wodurch sich eben eine Gleichung ergiebt, die nur noch x, y, z enthält, so haben wir nach einem bekannten Satze dadurch die Fläche gefunden, welche von allen denjenigen Flächen umhüllt wird, deren Gleichung

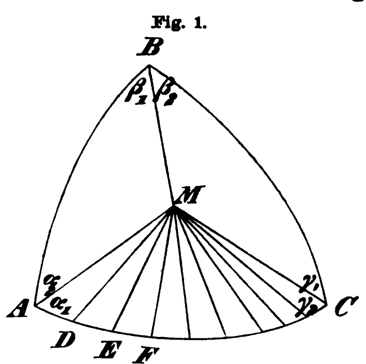
$$z = p \cdot x + f'(p) \cdot y - \psi(p)$$

ist, worin p einen constanten Parameter bedeutet. Daher stellt diese Gleichung eine Ebene vor, und giebt man dem p eine continuirliche Reihe von Werthen, so erhält man unendlich viel Ebenen, welche unsere Fläche einhüllen: die gesuchte Fläche ist also eine solche, welche die Durchschnitte je zweier auf einander folgenden Ebenen des umhüllenden Systems enthält, also in der That eine abwickelbare Fläche.

Anhang.

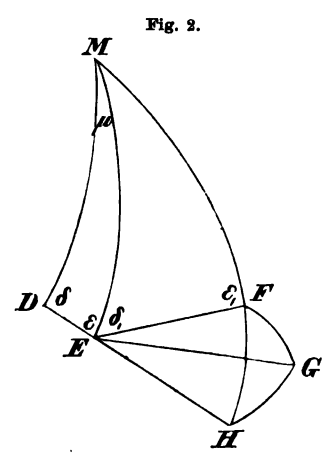
§ 1.

Ueber den Inhalt eines Polygons, welches von beliebigen Curven auf einer Kugelfläche gebildet wird.



Sei ABC (Fig. 1) ein Dreieck auf einer Kugelfläche, gebildet von drei sonst beliebigen Curven; α, β, γ die Winkel bei A, B, C; r der Radius der Kugel.

Durch Punkt M innerhalb des Dreiecks (Fig. 1) ziehen wir die Bogen grösster Kreise MA, MB, MC, theilen die Seiten des Dreiecks in unendlich kleine Theile AD, DE, EF u. s. w. und legen durch jeden Theilpunkt und Punkt M einen grössten Kreis. Sei (Fig. 2) MDE eines der dadurch entstehenden Dreiecke, so kann dies Dreieck als ein sphärisches betrachtet werden, da Seite DE, die unendlich klein ist, also nur ein Element enthält, sowohl als gerade Linie, wie auch als Stück eines grössten Kreises gelten kann; bezeichnen wir nun die Winkel bei M, D, E bezüglich mit μ, δ, ε, so ist der Inhalt dieses Dreiecks gleich $r^2(\mu + \delta + \varepsilon - \pi)$. Ist nun EF das DE benachbarte Element von Seite AC, EG die geodätische Fortsetzung von DE, d. h. das benachbarte Element des durch D und E gelegten grössten Kreises, EH die geradlinige Fortsetzung von DE und der unendlich kleine Winkel $FEG = d\vartheta$, so ist Winkel $MEF = \delta_1 = \pi - \varepsilon - d\vartheta$.*) Auf diese Weise erhält man für das ganze Dreieck MAC, wenn man die μ, δ, ε entsprechenden Winkel durch



*) Vergleiche hierüber § 11 A des Anhanges.

Indices unterscheidet, $MAC = \alpha_1$, $MCA = \gamma_2$ setzt und die Anzahl der Theile von AC gleich n annimmt:

$$MAC = r^2(\alpha_1 + \varepsilon_1 + \delta_2 + \varepsilon_2 + \delta_3 + \varepsilon_3 + \cdots$$
$$+ \delta_n + \gamma_2 + \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n - n\pi);$$

da aber $\delta_s = \pi - \varepsilon_{s-1} - d\vartheta$ und die Anzahl der $\delta = n - 1$ ist:

$$MAC = r^2(\alpha_1 + \gamma_2 - \Sigma d\vartheta - \pi + \Sigma\mu),$$

wenn die Summenzeichen sich auf alle Theile von AC und den Winkel MAC beziehen.

$d\vartheta$ ist der unendlich kleine Winkel, welchen die geodätische Fortsetzung eines Seitenelementes mit dem nächsten Elemente, oder, was dasselbe ist, die durch zwei auf einander folgende Elemente und den Mittelpunkt der Kugel gelegten Ebenen mit einander machen.

Es ist hier angenommen worden, dass die geodätische Fortsetzung von DE ausserhalb der Dreiecksfläche ABC fällt, fiele sie hinein, so wäre der entsprechende Theil von $\Sigma d\vartheta$ negativ zu nehmen. Berechnen wir in gleicher Weise die Inhalte der Dreiecke MAB und MBC und addiren, so ergiebt sich, da sich dann die Winkel μ zu 2π ergänzen:

1) $\quad$ Dreieck $ABC = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi - \Sigma d\vartheta)$.

α, β, γ sind die Winkel des Dreiecks, für das Zeichen $d\vartheta$ gilt die obige Bemerkung und die Summe Σ bezieht sich auf alle drei Seiten von ABC. Für ein beliebiges n-Eck auf der Kugelfläche erhalten wir leicht, wenn wir dasselbe irgendwie in Dreiecke theilen:

1a) $\quad$ n-Eck $= r^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - \Sigma d\vartheta - (n-2)\pi)$,

wo $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ die Winkel des n-Ecks sind, und die Summe Σ sich auf alle Seiten desselben erstreckt. Ergiebt sich der Werth des n-Ecks negativ, so bezieht sich dies auf die Lage desselben und es ist demgemäss das Vorzeichen zu ändern. Es lässt sich aber der Winkel $d\vartheta$ auch leicht durch das Bogenelement und den Contingenzwinkel der betrachteten Curve ausdrücken. Zu dem Ende sei EH (Fig. 2) die geradlinige Fortsetzung von DE; machen wir $EF = EG \doteq EH$ und legen durch FGH eine Kugelfläche mit Mittelpunkt E, so sind im sphärischen Dreiecke FGH die Seiten unendlich klein, sodass in den Fragen, wo unendlich kleine Grössen höherer Ordnung nicht in Anwendung kommen, dasselbe als eben zu betrachten ist. Dann ist FH der Contingenzwinkel der Curve AC, sei derselbe gleich $d\varphi$, ferner ist $GF = d\vartheta$, GH aber der Contingenzwinkel des durch D, E und G gelegten grössten Kreises, und dieser ist gleich $\frac{ds}{r}$, wenn man mit ds das Bogenelement DE bezeichnet.

FEG ist die Tangentialebene der Kugelfläche mit Mittelpunkt *M*, Ebene *GEH* oder *DEG* ist eine Normalebene derselben, also der Winkel bei *G* ein Rechter, also, wenn das Dreieck als eben betrachtet wird: $FH^2 = FG^2 + GH^2$, das heisst:

$$\frac{ds^2}{r^2} + d\vartheta^2 = d\varphi^2,$$

woraus sich ergiebt:

$$2)\qquad d\vartheta = \sqrt{d\varphi^2 - \frac{ds^2}{r^2}}, \quad \Sigma d\varphi = \int \sqrt{d\varphi^2 - \frac{ds^2}{r^2}},$$

wo sich das Integralzeichen auf alle drei Seiten des Dreiecks, oder alle Seiten des n-Ecks bezieht. Für das Vorzeichen gilt die obige Bemerkung.

Für den Fall, dass die Seiten des n-Ecks eben, also Kreise sind, lässt sich dieses Integral berechnen. Sei dann L die Länge einer Seite des Polygons, ϱ ihr Radius, dann ist: $d\varphi = \frac{ds}{\varrho}$, und der auf diese Seite bezügliche Theil von $\Sigma d\vartheta$ wird:

$$\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r^2}} \int ds = L \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r^2}},$$

so dass man für das ganze Polygon erhält:

$$3)\qquad \text{Polygon} = r^2 \left(\Sigma\alpha \mp \Sigma L \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r^2}} - (n-2)\pi \right),$$

wo das erste Summenzeichen auf alle Winkel, das zweite auf alle Seiten sich erstreckt. L und ϱ ändern sich also von Seite zu Seite. Das Vorzeichen des zweiten Gliedes bestimmt sich nach der obigen Regel. Diese Formel lässt sich aber noch etwas einfacher schreiben. Zunächst sei b der Abstand des Mittelpunktes einer Seite des Vielecks vom Mittelpunkte der Kugel, und β der zu dieser Seite gehörige Centriwinkel, dann ist: $L = \varrho\beta$, $\sqrt{r^2 - \varrho^2} = b$, also:

$$3a)\qquad \text{Polygon} = r\{r\Sigma\alpha \mp \Sigma\beta b - (n-2)\pi\}.$$

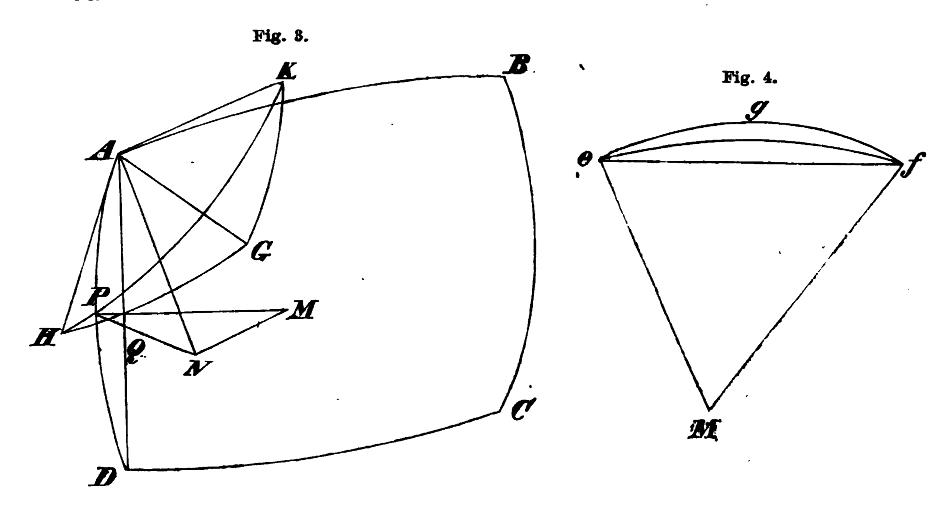
Beispiel. Legen wir durch die Kugel zwei parallele Ebenen, beide in der Entfernung b, und zwei auf ihnen senkrechte Ebenen in der Entfernung b_1 vom Mittelpunkte, so wird auf der Oberfläche der Kugel ein Viereck *ABCD* (Fig. 3) aus vier Kreisbogen bestehend abgeschnitten. Dessen Inhalt sei zu bestimmen. Jeden der vier gleichen Winkel desselben bezeichnen wir mit W, fällen vom Mittelpunkte der Kugel M das Loth $MN = b$ auf die Ebene von AD, ziehen NP senkrecht auf Sehne AD, welche in Q geschnitten wird, ziehen MP und NA, dann ist:

$$MN = b, \quad AQ = b_1, \quad NA = NP = \varrho, \quad ANP = \frac{\beta}{2} = \arcsin\frac{b_1}{\varrho}.$$

Bezeichnen wir noch den zu Bogen AB gehörigen Centriwinkel mit β_1 und mit ϱ_1 den Radius dieses Bogens, so ist $\frac{\beta_1}{2} = \arc \sin \frac{b}{\varrho_1}$, wir erhalten also nach 3a):

$$\text{Viereck } ABCD = 4r\left\{r\left(W - \frac{\pi}{2}\right) \mp \left(b \arc \sin \frac{b_1}{\varrho} + b_1 \arc \sin \frac{b}{\varrho}\right)\right\}.$$

Das Zeichen der zwei letzten Glieder, welche für $\Sigma d\vartheta$ stehen, ist noch zu bestimmen.



Denkt man sich zu irgend einem Theile ef von AB (Fig. 4) die Sehne gezogen, so ist diese die Schnittlinie der Ebene von AB und des durch e und f gelegten grössten Kreises, der Bogen egf des letzteren fällt also ausserhalb der Viereckfläche $ABCD$, seine Fortsetzung in dieselbe. Da dies noch richtig bleibt, wenn ef ein unendlich kleiner Theil von AB ist, so ist also nach unserer Regel $\Sigma d\vartheta$ negativ, daher das untere positive Vorzeichen zu nehmen.

Noch ist der Winkel W durch b, b_1 und r auszudrücken.

Seien AH und AK (Fig. 3) Tangenten an AD und AB im Punkte A, AG der Durchschnitt der Ebenen dieser Kreisbogen. Die drei Linien AH, AG, AB bilden dann eine bei AG rechtwinklige körperliche Ecke, in welcher man hat:

$$\text{Winkel } GAH = GAQ + QAH = \frac{\pi}{2} + \arc \sin \frac{b_1}{\varrho}$$

und ebenso:

$$GAK = \frac{\pi}{2} + \arc \sin \frac{b}{\varrho_1},$$

dies sind die Katheten unserer rechtwinkligen Ecke, HAK oder W deren Hypotenuse, also:

$$\cos W = \cos GAK \cos GAH = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{b_1}{\varrho}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{b}{\varrho_1}\right) = \frac{b b_1}{\varrho \varrho_1},$$

also: $\quad W = \operatorname{arc\,cos} \frac{b b_1}{\varrho \varrho_1}, \quad W - \frac{\pi}{2} = - \operatorname{arc\,sin} \frac{b b_1}{\varrho \varrho_1},$

also schliesslich, da $\varrho = \sqrt{r^2 - b^2}$, $\varrho_1 = \sqrt{r^2 - b_1^2}$ ist:

Viereck $ABCD$

$$= 4r\left\{b \arcsin \frac{b_1}{\sqrt{r^2 - b^2}} + b_1 \arcsin \frac{b}{\sqrt{r^2 - b_1^2}} - r \arcsin \frac{b b_1}{\sqrt{r^2 - b^2}\sqrt{r^2 - b_1^2}}\right\}.$$

Führen wir noch statt des arc sin den arc tg ein, sei also:

$$\arcsin \alpha = u, \quad \alpha = \sin u,$$

so ist
$$\operatorname{tg} u = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}},$$

oder:
$$\arcsin \alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

Diese Formel auf unsere drei arc sin angewandt, giebt:

$$\text{Viereck } ABCD = 4r\left(b \operatorname{arc\,tg} \frac{b_1}{c} + b_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{c} - r \operatorname{arc\,tg} \frac{b b_1}{r c}\right),$$

wo c für $\sqrt{r^2 - b^2 - b_1^2}$ gesetzt ist*).

§ 2.

Ueber sphärische Dreiecke, worin ein Winkel und seine Gegenseite unendlich klein sind.

Es handelt sich hier um einige Formeln, die für das Folgende von Nutzen sind. Sei ABC (Fig. 5) ein spärisches Dreieck, in welchem der Winkel β bei B, und seine Gegenseite $AC = b$ unendlich klein sein sollen. Seien die anderen Seiten $BA = c$ und $BC = c + \delta$, γ und $\alpha = \pi - \gamma - \varepsilon$ die Gegenwinkel dieser Seiten, dann sind auch δ und ε unendlich klein. Das Dreieck enthält somit zwei endliche Stücke c und γ und vier unendlich kleine b, β, δ, ε. Nebst den beiden ersteren reicht also eins der letzteren hin, um die übrigen auszudrücken. Dies soll hier in der Art geschehen, dass wir noch unendlich Kleine zweiter Ordnung berücksichtigen.

Fig. 5.

*) Der körperliche Inhalt des aus der Kugel von den vier Ebenen herausgeschnittenen Stückes ergiebt sich hieraus sehr leicht, wenn man dasselbe vom Kugelmittelpunkte aus in Pyramiden nnd Kegel theilt, welche theils den Radius r, theils die Abstände b und b_1 zu Höhen haben.

Wir bedienen uns zu dem Ende folgender Formeln der sphärischen Trigonometrie:

I) $$\sin\gamma \sin(c+\delta) = \sin c \sin(\gamma+\varepsilon),$$

II) $$\cot c \sin(c+\delta) - \sin\beta \cot\gamma = \cos(c+\delta)\cos\beta,$$

III) $$\sin b \sin\gamma = \sin\beta \sin c,$$

IV) $$-\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos c = -\cos(\gamma+\varepsilon).$$

Mit Vernachlässigung der Grössen dritter Ordnung giebt Gleichung I):

$$\delta \cot c - \frac{\delta^2}{2} = \varepsilon \cot\gamma - \frac{\varepsilon^2}{2};$$

da sich, wenn man die Grössen zweiter Ordnung weglässt, hieraus

$$\delta = \varepsilon \operatorname{cotg}\gamma \operatorname{tg} c, \quad \text{also} \quad \delta^2 = \varepsilon^2 \cot^2\gamma \operatorname{tg}^2 c$$

bis auf Grössen zweiter Ordnung richtig ergiebt, so haben wir:

1) $$\delta = \varepsilon \cot\gamma \operatorname{tg} c - \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{tg} c\,(1 - \cot^2\gamma \operatorname{tg}^2 c),$$

und wenn man in derselben Weise ε bestimmt:

2) $$\varepsilon = \delta \cot c \operatorname{tg}\gamma - \frac{\delta^2}{2} \operatorname{tg}\gamma(1 - \cot^2 c \operatorname{tg}^2\gamma).$$

Formel II) aber giebt:

$$\frac{\delta \cos^2 c}{\sin c} - \beta \cot\gamma = \delta \sin c - \frac{\beta^2}{2}\cos c,$$

also:

3) $$\delta = \beta \cot\gamma \sin c - \frac{\beta^2}{2} \sin c \cos c,$$

oder wenn man β bestimmt, β^2 aber nach der Methode, die bei Formel 1) angewandt wurde, fortschafft:

4) $$\beta = \frac{\delta \operatorname{tg}\gamma}{\sin c} + \frac{\delta^2}{2}\frac{\cot c}{\sin c}\operatorname{tg}^3\gamma.$$

Formel III) giebt, da mit Hinweglassung von Grössen dritter Ordnung $\sin b = b$ und $\sin\beta = \beta$ ist:

5) $$b = \frac{\beta \sin c}{\sin\gamma},$$ 6) $$\beta = \frac{b \sin\gamma}{\sin c},$$

wo also das mit β^2 bezüglich mit b^2 multiplicirte Glied gleich Null ist.

Endlich giebt Formel IV):

$$\beta \sin\gamma \cos c + \frac{\beta^2}{2}\cos\gamma = \varepsilon \sin\gamma + \frac{\varepsilon^2}{2}\cos\gamma,$$

oder, wenn man in der angeführten Weise β^2 wegschafft:

7) $$\beta = \frac{\varepsilon}{\cos c} - \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\cot\gamma \operatorname{tg}^2 c}{\cos c}$$

und ebenso:

8) $$\varepsilon = \beta \cos c + \frac{\beta^2}{2} \cot \gamma \sin^2 c.$$

Die Grössen β, b, δ, ε sind also im allgemeinen Falle von gleicher, d. h. erster Ordnung. Ist aber $c = \frac{\pi}{2}$, so erhält man:

$$\varepsilon = -\frac{\delta^2}{2} \operatorname{tg} \gamma, \quad \beta = \delta \operatorname{tg} \gamma.$$

Es ist also $\varepsilon = \pi - \gamma - \alpha$ von der zweiten Ordnung, während β von der ersten ist, darin aber das Glied zweiter Ordnung verschwindet.

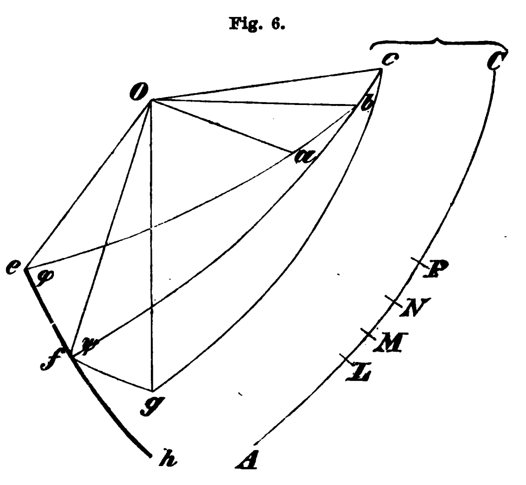
§ 3.

Beweis des Jacobi'schen Satzes. (§ 109. Anmerkung.)

Dieser Satz, welcher den Gaussischen mit umfasst, lautet:

Wenn in einem beliebigen, von Curven gebildeten Dreiecke im Raume je zwei Seiten in ihren Schnittpunkten gemeinschaftliche Hauptnormalen haben, so hat das Dreieck folgende Eigenschaft: Zieht man durch den Mittelpunkt einer Hülfskugel mit Radius 1 zu jeder Hauptnormale des Umfanges unseres Dreieckes eine Parallele, so schneiden diese auf der Kugelfläche ein zweites Dreieck ab, dessen Inhalt gleich dem Ueberschuss der Winkelsumme des gegebenen Dreiecks über π ist (mit umgekehrtem Vorzeichen, wenn diese Summe kleiner als π ist).

Fig. 6.



Von diesem Satze soll hier ein einfacher Beweis gegeben werden. Sind die Winkel des Dreiecks auf der Hülfskugel α, β, γ, so ist der Inhalt dieses Dreiecks nach § 1, Anhang gleich

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi - \Sigma d\vartheta.$$

Die letztere Summe lässt sich aber hier noch anders ausdrücken und zwar mit Bezug auf das ursprüngliche Dreieck. Seien nämlich $LMNP$ aufeinander folgende Punkte einer Seite des letzteren (Fig. 6), Oe, Of, Og die drei Radien der Hülfskugel, welche den durch L, M und N gelegten Hauptnormalen parallel sind, seien ferner die Radien Oa, Ob, Oc den Elementen LM, MN, NP selbst parallel,

dann ist im sphärischen Dreiecke bef Seite $bf = \frac{\pi}{2}$, da Tangente Ob auf Normale Of senkrecht steht, der Winkel bei b und die Seite ef unendlich klein, folglich (§ 2 Schluss), wenn wir $bef = \varphi$, $bfe = \psi$ setzen: $\varphi + \psi = \pi$, mit Hinweglassung der Grössen zweiter Ordnung, denn $\varphi + \psi$ entspricht der Grösse $\alpha + \gamma$, welche bis auf eine Grösse zweiter Ordnung $= \pi$ war. Im Dreieck cfg ist aber Winkel $cfg = \varphi + d\varphi$; setzt man nun Seite ef geodätisch nach fh fort, so ist gfh in Bezug auf das Dreieck auf der Hülfskugel der in § 1 mit $d\vartheta$ bezeichnete Winkel, aber:

$$\varphi + \psi + cfg + gfh = \pi,$$

das heisst:

$$\varphi + \psi + d\varphi + d\vartheta = \pi,$$

oder wegen

$$\varphi + \psi = \pi: \quad d\varphi = -d\vartheta.$$

Der Winkel φ lässt sich aber auch leicht in Bezug auf das ursprüngliche Dreieck definiren. Es ist derjenige, welchen die zwei aufeinander folgenden Hauptnormalen parallele Ebene (Oef) mit der Krümmungsebene (Oeb) macht. Bezeichnen wir diesen Winkel für den Anfangspunkt A der Linie AC mit φ_0, und für Punkt C mit φ_1, so ist also für die ganze Linie AC: $\Sigma d\vartheta = \varphi_0 - \varphi_1$; seien die φ entsprechenden Winkel für Linie AB gleich ψ_0 in Punkt B, ψ_1 in A, und für Linie BC χ_0 in C, χ_1 in B, so hat man für das ganze Dreieck auf der Hülfskugel:

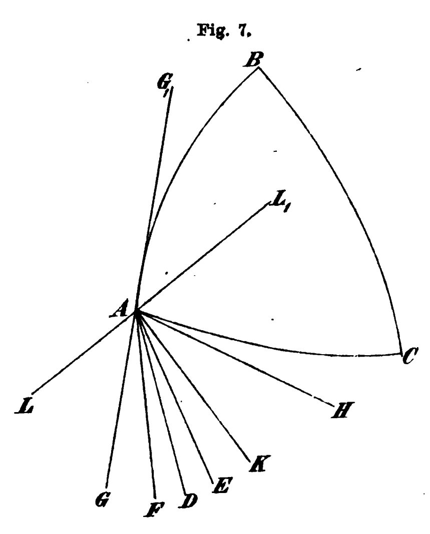


Fig. 7.

$$\Sigma d\vartheta = \varphi_0 - \varphi_1 + \psi_0 - \psi_1 + \chi_0 - \chi_1.$$

Legen wir nun durch eine der Ecken A (Fig. 7) des gegebenen Dreieckes die für AC und AB gemeinschaftliche Hauptnormale AD, ferner die benachbarten Hauptnormalen AE von AB, und AF von AC, ferner die Tangenten AH an AC, AG an AB, welche Linie wir nach G_1 hin verlängern, AL und AK lothrecht auf AD, erstere Linie in Ebene DAE, letztere in Ebene DAF, und verlängern AL nach L_1 hin, so liegen dann die Lothe auf AD, nämlich: AG, AH, AK, AL in einer Ebene. DAH und DAG sind dann die Krümmungsebenen beider Curven AC und AB, es ist also Winkel

$HAK = \varphi_0$, $GAL = \psi_1$; $G_1AH = A$ ist der Winkel bei A für das gegebene Dreieck, $KAL_1 = \alpha$ der Winkel, den die zwei aufeinander folgenden Hauptnormalen beider Curven parallelen Ebenen mit einander machen, d. h. der A entsprechende Winkel des Hülfsdreieckes, es ist dann:

$$KAL = HAG + LAG - KAH,$$

oder:

$$\pi - \alpha = \pi - A + \psi_1 - \varphi_0,$$

oder:

$$\alpha = A + \varphi_0 - \psi_1.$$

Aehnliche Formeln erhalten wir für die Ecken B und C, nämlich:

$$\beta = B + \psi_0 - \varphi_1, \quad \gamma = C + \chi_0 - \psi_1,$$

und durch Addition aller drei Formeln, ergiebt sich dann:

$$\alpha + \beta + \gamma = A + B + C + (\varphi_0 - \varphi_1) + (\psi_0 - \psi_1) + (\chi_0 - \chi_1)$$
$$= A + B + C + \Sigma d\vartheta,$$

d. h. der Inhalt des auf der Hülfskugel gezogenen Dreiecks, den wir gleich $\alpha + \beta + \gamma - \Sigma d\vartheta - \pi$ gefunden hatten, nimmt die Form $A + B + C - \pi$ an, womit unser Satz bewiesen ist. Wir sind von dem Falle ausgegangen, dass die geodätische Fortsetzung von ef ausserhalb des Dreiecks fällt, weshalb auch das Vorzeichen von $\Sigma d\vartheta$ richtig ist.

Anmerkung. Ist die Winkelsumme von $A + B + C$ kleiner als π, so ist der Ausdruck für den Inhalt negativ, was sich dann auf die gegenseitige Lage vom ursprünglichen und Hülfsdreieck bezieht.

Ueber ein neues Coordinatensystem.

§ 4.

Die vorigen Betrachtungen gehen davon aus, dass man statt der gewöhnlichen Coordinaten gewisse den doppelt gekrümmten Curven angehörige unendlich kleine Winkel und deren Summen in Betracht zieht. Wir wollen hier diese Betrachtungen zur Aufstellung eines neuen Coordinatensystems für doppelt gekrümmte Linien erweitern, welches, da es nur von der Lage der Curven- oder Winkelelemente zu einander ausgeht, namentlich bei solchen Betrachtungen Vortheil gewährt, wo es sich weniger um die Lage als um die Gestalt der Curven handelt.

Zu dem Ende betrachten wir zur Bestimmung des Punktes M einer Curve folgende drei Grössen:

1) Die Bogenlänge von einem festen sonst willkürlichen Punkte an gerechnet bis M, diese Länge sei gleich s.

2) Die Summe aller unendlich kleinen Winkel, welche je zwei aufeinander folgende Tangenten von einem gegebenen Punkte bis zum Punkte M mit einander machen; diese Winkelsumme sei l, also dl der Winkel zweier nächsten Tangenten. Bemerken wir noch, dass, wenn die Curve mit ihrer Tangentenschaar in die Ebene abgewickelt wird, dl sich nicht ändert, also l auch der Winkel ist, der nach erfolgter Abwickelung von der Tangente in M mit einer Anfangsrichtung der Tangente gebildet wird.

3) Die Summe aller unendlich kleinen Winkel, welchen je zwei aufeinander folgende Krümmungsebenen von einem gegebenen Punkte bis zum Punkte M mit einander machen; diese Summe sei gleich m, also dm der Winkel zweier nächsten Krümmungsebenen.

Es sei erlaubt, diese drei Coordinaten s, l, m jede von einem andern Anfangspunkte aus zu zählen, es sei auch nicht ganz ausgeschlossen, dass wir die Curve beliebig verlängern und die Coordinaten von irgend einem Punkte dieser Verlängerung aus zählen, die wir dann als zur Curve gehörig betrachten. Wollen wir die Coordinaten ändern, so können wir nur die Anfangspunkte oder die Richtung, in der wir von Punkt zu Punkt fortschreiten, ändern, in welchem letzteren Falle nur das Vorzeichen sich ändert, es werden also die neuen Coordinaten s, l, m sich durch die alten immer vermittelst der Formeln:

$$s_1 = a \pm s, \quad l_1 = b \pm l, \quad m_1 = c \pm m$$

ausdrücken, wo a, b, c beliebige Constanten sind. Andere Transformationsformeln sind unmöglich und es können daher unsere Coordinaten als die der einfachsten Transformationen bezeichnet werden*).

Um die Curve zu bestimmen, sind zwei Gleichungen nöthig, die wir in der Regel unter der Form:

$$s = f(l), \qquad m = \varphi(l)$$

schreiben; l und m nennen wir die Gesammtkrümmungen unserer Curve und bezeichnen l als Linienkrümmung, m als Flächenkrümmung, die Gleichung $m = \varphi(l)$ möge daher Krümmungsgleichung heissen, die erste Gleichung $s = f(l)$ bezeichnen wir als Bogengleichung.

Wollen wir diese Betrachtungen auch auf ebene Curven anwenden, so ist $dm = 0$, also m constant, es ist dann nur eine Gleichung $s = f(l)$ nöthig. Da s und l sich übrigens nicht ändern, wenn eine

*) Der einfachsten Transformation nämlich dann, wenn man auf die Anzahl der Constanten a, b, c nicht achtet. Sonst könnten auch die beiden Krümmungen selbst: $l' = \frac{dl}{ds}$, $m' = \frac{dm}{ds}$ als Coordinaten dienen, wo dann nur eine Constante a die Transformation bewerkstelligt.

Curve in die Ebene abgewickelt wird, so stellt die Bogengleichung zugleich die aus Abwickelung der gegebenen erzeugte Curve dar. Da jede doppelt gekrümmte Linie zugleich Wendungskante einer abwickelbaren Fläche ist, so wird diese Fläche ebenfalls durch unsere Gleichungen bestimmt, und können dieselben auch auf diese Fläche bezogen werden. Dann gehört jede Krümmungsgleichung unendlich vielen abwickelbaren Flächen an. Unter diesen Flächen wird immer ein Kegel sein, für diesen ist $ds = 0$, also s constant, da die Wendungskante ein Punkt ist. Dieser Kegel möge der Krümmungskegel heissen, man kann alle Curven, die gleiche Krümmungsgleichung haben, dann als zu demselben Krümmungskegel gehörig betrachten. Der Cylinder gehört auch zu den abwickelbaren Flächen, für einen solchen ist offenbar $dl = 0$, also $l =$ const., dies ist die Krümmungsgleichung des Cylinders. Die Bogengleichung wird für ihn illusorisch. Man kann jedoch, um denselben zu bestimmen, die Gleichung seiner Basis, also der auf seiner Seite senkrechten ebenen Curve betrachten. Der Winkel zwischen zwei nächsten Tangenten dieser Basis ist dann offenbar der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Tangentialebenen des Cylinders, und da dieser gleich dm ist, so haben wir, wenn s_1, l_1 Bogenlänge und Linienkrümmung für die Cylinderbasis sind, die Gleichung $m = l_1$, so dass die Gleichung der Basis die Form $s_1 = F(m)$ hat. Will man von diesen neuen Coordinaten zu den rechtwinkligen übergehen oder umgekehrt, so hat man die Ausdrücke für ds, dl, dm (Abschnitt I) einzusetzen. Dies führt im Allgemeinen zu complicirten Formeln. Jedoch für ebene Curven werden dieselben sehr einfach, es ist nämlich bekanntlich:

$$dx = \cos(l + c)\, ds, \quad dy = \sin(l + c)\, ds,$$

wenn c der Winkel der Anfangstangente mit der Axe der x ist.

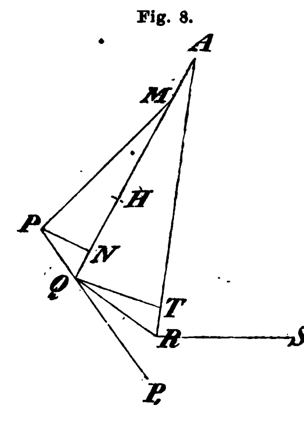
Aus diesen Formeln, oder in der Regel noch leichter aus den Eigenschaften der Curven selbst, ergeben sich die Gleichungen verschiedener Curven in den neuen Coordinaten. Wir führen von denselben zunächst folgende an:

$l = c$ für die gerade Linie,
$s = rl$ für den Kreis,
$s = A \sin l$ für die Cycloide,
$s = A \sin \alpha l$ für die Epicycloide und Hypocycloide,
$s = A \operatorname{tg} l$ für die Kettenlinie,
$s = Ae^{\alpha l}$ für die logarithmische Spirale,
$s = Al + Bl^2$ für die Kreisevolvente.

§ 5.

Von dem eben definirten Coordinatensysteme machen wir jetzt einige Anwendungen.

Bezeichnen wir die Wendungskante einer abwickelbaren Fläche mit L und eine auf dieser Fläche irgendwie gezeichnete Curve mit C; es soll der Zusammenhang zwischen diesen Curven L und C durch die in Rede stehenden Coordinaten ausgedrückt werden.



Zu dem Ende mögen sich die Coordinaten s, l, m auf L und σ, λ, μ auf C beziehen. Sei (Fig. 8) v der Winkel eines Elementes von C, PQ, mit der durch dasselbe gehenden Tangente MP von L, und w der Winkel der Krümmungsebene PQR von C im Punkte P, mit der von L, PQM, d. h. mit der Tangentialebene der abwickelbaren Fläche. Es sind hier PQR drei aufeinander folgende Punkte der Curve C, MA zwei der Curve L, es ist also $PQ = d\sigma$, $AM = ds$, Winkel $PMQ = dl$, sei ferner $MP = \varrho$, also

$$MQ = \varrho + d\varrho - ds, \quad \text{Winkel } MQP = \pi - v - dl,$$

und wenn man Loth PN auf MQ fällt:

$$NQ = d\varrho - ds = PQ \cos(\pi - v - dl),$$

mit Vernachlässigung der unendlich Kleinen zweiter Ordnung, d. h.:

$$1) \qquad d(\varrho - s) = - d\sigma \cos v,$$

ferner $PN = d\sigma \sin v$. Im Dreieck PNM ist dann:

$$PN = \varrho \sin dl = \varrho dl, \quad \text{d. h.:}$$

$$2) \qquad \varrho dl = \sin v d\sigma;$$

aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch Elimination von ϱ:

$$3) \qquad d\left(s - \sin v \frac{d\sigma}{dl}\right) = \cos v d\sigma,$$

oder:

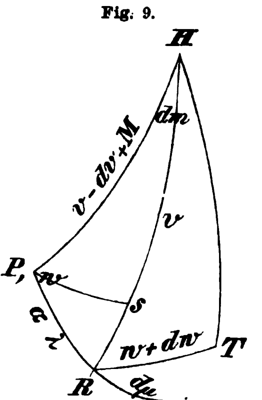
$$\frac{ds}{dl} - \sin v \frac{d^2\sigma}{dl^2} = 2 \cos v \frac{d\sigma}{dl},$$

eine Gleichung, die zur Bestimmung von σ dient.

Um λ und μ zu bestimmen, verlängern wir PQ nach P_1. Seien QR und RS die nächsten Elemente der Curve C, QT parallel RS, machen wir dann: $QP_1 = QR = QT = QH$, wo H ein Punkt auf QM, QP_1 die Verlängerung von QP ist, und legen durch die

Endpunkte dieser Linien eine Kugel mit dem Mittelpunkte Q, so erhalten wir das sphärische Viereck HP_1RT (Fig. 9). In diesem ist Winkel HQR oder Bogen $HR = v$, wenn wir QR als das Element annehmen, das mit der Erzeugungslinie MQ den Winkel v macht, ferner

Fig. 9.



$$\text{Winkel } MPQ = v - dv,$$

also Winkel HQP_1 oder

$$\text{Bogen } HP_1 = v - dv + dl,$$

Winkel P_1QR oder Bogen $P_1R = d\lambda$, der Winkel zwischen P_1QM und P_1QR oder Winkel HP_1R sei gleich w, also der Winkel zwischen MQR und RQT oder Winkel $HRT = w + dw$, der Winkel zwischen P_1QR und RQT oder Winkel P_1RT ist also $= \pi - d\mu$, der Winkel zwischen P_1QM und RQM oder Winkel $P_1HR = dm$. Im Dreieck P_1HR sind somit $P_1H = v - dv + dl$, $P_1R = d\lambda$, $HR = v$, Winkel $H = dm$, Winkel $P_1 = w$, Winkel $R = \pi - w - dw - d\mu$.

Für dieses Dreieck gelten die Formeln des § 2, worin mit Vernachlässigung der Grössen zweiter Ordnung zu setzen ist:

$$b = d\lambda, \quad \beta = dm, \quad c = v - dv + dl, \quad \delta = dv - dl,$$

$$\alpha = \pi - \gamma - \varepsilon = w, \quad \gamma = \pi - w - dw - d\mu,$$

also

$$\varepsilon = dw + d\mu.$$

Die Gleichungen 3) und 4) des § 2 geben dann $\delta = b \cos \gamma$, also:

4) $$d(l - v) = \cos w d\lambda,$$

Formel 5) des § 2 giebt:

5) $$\sin w d\lambda = \sin v dm$$

und Formel 8):

6) $$d(\mu + w) = \cos v dm.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich w, λ und μ, wenn l, m und v bekannt sind, in Verbindung mit Gleichung 3), und nach Elimination von w ist also unser Problem gelöst.

Ist die abwickelbare Fläche ein Kegel, so ist $ds' = 0$, ist sie ein Cylinder, so wird Gleichung 3) illusorisch. Führen wir statt deren die Coordinaten s_1 und m der Basis des Cylinders ein, wo m der Winkel zwischen zwei Tangentialebenen des Cylinders sein wird. Sei AB (Fig. 10) ein Element dieser Basis, AC eins der Curve C, dann ist Winkel $BAC = v - \frac{\pi}{2}$, also $AB = AC \sin v$, oder:

3a) $$ds_1 = d\sigma \cdot \sin v,$$

ausserdem ist in Gleichung 4) $dl = 0$ zu setzen. Im allgemeinen Falle denken wir uns jetzt die abwickelbare Fläche in die Ebene gewickelt, so bleiben s, l, σ und v unverändert, es gilt also Gleichung 3) für die beiden Curven, die sich aus L und C bei der Abwicklung ergeben.

Fig. 10.

A B C

Sei ferner $d\lambda_1$ der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Elementen der Curve, die sich aus C ergiebt, so wird dieser Winkel die Differenz zwischen $MQR = v$ und $MQP_1 = v - dv + dl$ (Fig. 8) sein, also:

7) $$d\lambda_1 = dl - dv, \quad \lambda_1 = l - v + \text{const.}$$

Für den Cylinder also $\lambda_1 = \text{const.} - v$. (Wir bemerken noch, dass für den Cylinder m (§ 4) die Linienkrümmung seiner Basis ist.)

Die Gleichung 3) wird dann die Form annehmen:

8) $$d\left(s - \sin v \frac{d\sigma}{d\lambda_1 + dv}\right) = d\sigma \cdot \cos v$$

und hieraus ergiebt sich die Gleichung der ebenen Curve, in die sich C verwandelt.

Aus den Formeln 4) bis 6), welche λ, μ, w nur durch l, m, v bestimmen, ergiebt sich noch das allerdings an sich einleuchtende Resultat: Der Krümmungskegel einer Curve auf einer abwickelbaren Fläche ist nur von dem Krümmungskegel dieser Fläche abhängig.

§ 6.

Die eben gefundenen allgemeinen Formeln wollen wir jetzt specialisiren. Als ersten Fall nehmen wir an, dass die Curve C eine kürzeste Linie auf der abwickelbaren Fläche sei. Sie giebt dann abgewickelt eine Gerade, es ist folglich $d\lambda_1 = 0$, also wegen 7) $v = l + c$, und wegen 4) $w = \frac{\pi}{2}$, wie schon bekannt ist.

Die Gleichungen 3), 5) und 6) geben dann:

a) $$2\frac{d\sigma}{dl}\cos(l + c) = \frac{ds}{dl} - \sin(l + c)\frac{d^2\sigma}{dl^2},$$

b) $$d\lambda = \sin(l + c)dm,$$

c) $$d\mu = \cos(l + c)dm.$$

Für den Cylinder, wo $l = \text{const.}$, erhalten wir:

d) $$ds_1 = d\sigma \cdot \sin(l + c) \quad \text{oder:} \quad s_1 = \sigma \sin(l + c) + c_1,$$

und wegen der Gleichungen b) und c):

e) $$\lambda = m \sin(l + c) + c_2,$$

f) $$\mu = m \cos(l + c) + c_3,$$

also nach Elimination von m:

g) $$\lambda - c_2 = (\mu - c_3) \operatorname{tg}(l + c).$$

Dies ist die Krümmungsgleichung der kürzesten Linie auf dem Cylinder oder der allgemeinen Schraubenlinie, sie ist also immer linear, umgekehrt gehört eine lineare Krümmungsgleichung immer einer Schraubenlinie an. Diese Gleichung lässt sich durch Coordinatentransformation übrigens auf die einfachere Form bringen: $\lambda = \mu \operatorname{tg} \alpha$, wo $\alpha = l - c$, also constant ist.

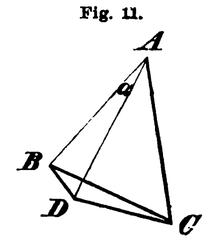


Fig. 11.

Für den Rotationskegel lässt sich die Krümmungsgleichung leicht direct finden. Seien (Fig. 11) BA und DA zwei aufeinander folgende Seiten desselben, AC seine Axe, $BAC = \alpha$ der halbe Scheitelwinkel, BC und DC bezüglich auf BA und DA senkrecht, dann ist:

$$\text{Winkel } BAD = dl, \quad BCD = dm,$$

also: $$BD = BA \cdot dl = BC \cdot dm = BA \cdot \operatorname{tg} \alpha \, dm,$$

woraus sich $l = m \operatorname{tg} \alpha + \text{const.}$ ergiebt.

Die Uebereinstimmung dieser Gleichung mit der Krümmungsgleichung der Schraubenlinie lehrt folgender Satz:

Der Krümmungskegel irgend einer Schraubenlinie ist immer ein Rotationskegel, und dieser letztere gehört allen Schraubenlinien an, welche die Seite des zugehörigen Cylinders unter demselben Winkel v schneiden. Betrachten wir noch den Fall, wo die betreffende Schraubenlinie einem Rotationscylinder angehört. Es ist dann, da die Basis desselben ein Kreis ist:

$$s_1 = rm, \quad \text{also} \quad rm = \sigma \sin(l + c) + c_1,$$

woraus sich wegen Formel e) eine lineare Gleichung

h) $$\frac{\lambda + c_2}{\sin(l + c)} r = \sigma \sin(l + c) + c_1$$

zwischen σ und λ ergiebt.

Also: Die Bogengleichung einer gewöhnlichen Schraubenlinie ist ebenfalls linear. Wird dieselbe also mit ihrer Tangentenschaar in die Ebene gewickelt, so verwandelt sie sich (nach § 4) in einen Kreisbogen.

Die Gleichungen b) und c) geben aber eine allgemeine bemerkenswerthe Eigenschaft der kürzesten Linien auf abwickelbaren

Flächen an. Vergleicht man nämlich diese Gleichungen mit den in § 4 angeführten:

$$dx = ds \cdot \cos(l + c), \qquad dy = ds \cdot \sin(l + c),$$

welche für ebene Curven gelten, so ergiebt sich folgender Satz:

Denkt man sich die Linienkrümmung l irgend einer abwickelbaren Fläche als Winkel der Tangente einer ebenen Curve mit einer beliebigen Richtung in ihrer Ebene, etwa der der x-Axe, und die Flächenkrümmung m als Bogenlänge dieser ebenen Curve dargestellt, so sind λ, μ, also die Gesammtkrümmungen der kürzesten Linie auf der abwickelbaren Fläche, die rechtwinkligen Coordinaten dieser ebenen Curve.

Von den unendlich vielen möglichen Systemen solcher rechtwinkliger Coordinaten bezieht sich dann jedes auf eine andere kürzeste Linie der abwickelbaren Fläche. Gehen wir z. B. von der Schraubenlinie aus, so giebt die lineare Krümmungsgleichung derselben als Bogengleichung einer ebenen Curve betrachtet einen Kreis, und die Gleichung desselben in rechtwinkligen Coordinaten λ und μ ist bekanntlich: $(\lambda - h)^2 + (\mu - k)^2 = B^2$; dies ist also die Krümmungsgleichung der kürzesten Linie auf der von den Tangenten einer beliebigen Schraubenlinie gebildeten abwickelbaren Fläche. Dieselbe Krümmungsgleichung findet nach dem Obigen für die kürzeste Linie auf dem Rotationskegel statt.

Suchen wir noch für die abwickelbaren Flächen, deren Wendungskante die gemeine Schraubenlinie ist, die Bogengleichung der kürzesten Linie.

Durch Coordinatentransformation lassen sich die linearen Gleichungen dieser Schraubenlinie, welche wir erhalten, wenn wir in den Gleichungen g) und h) für σ und λ bezüglich s und l schreiben, immer auf die Form bringen $s = Al$, $l = Bm$, also wegen Gleichung a):

$$2\frac{d\sigma}{dv} = A - \sin v\,\frac{d^2\sigma}{dv^2},$$

wo wieder $v = l + C$ gesetzt wurde. Die lineare Differentialgleichung ist leicht zu integriren. Setzen wir $\frac{d\sigma}{dv} = pq$, wo eine der Grössen p oder q ganz beliebig ist, es uns also freisteht, eine zweite beliebige Gleichung zwischen p und q anzunehmen, so kommt:

$$2pq\cos v = A - \sin v\left(p\,\frac{dq}{dv} + q\,\frac{dp}{dv}\right).$$

Die bis jetzt beliebige Gleichung zwischen p und q wählen wir so, dass der Factor von p verschwindet, dadurch zerfällt die letzte Gleichung in zwei andere:

$$2q \cos v = -\sin v \frac{dq}{dv}, \quad A = q \sin v \frac{dp}{dv}.$$

Das Integral der ersteren ist:

$$2 \lg \sin v = \lg \frac{C_1}{q},$$

wo C_1 die Integrationsconstante ist, d. h.:

$$q \sin v^2 = C_1;$$

die Constante kann übrigens beliebig, z. B. gleich 1 angenommen werden, da nur eine Integrationsconstante erforderlich ist und diese sich aus der zweiten Gleichung ergiebt; diese Gleichung wird jetzt heissen:

$$\frac{1}{\sin v} \cdot \frac{dp}{dv} = A,$$

und ihr Integral ist:

$$p = -A \cos v + c_2,$$

man hat also:

$$\frac{d\sigma}{dv} = pq = -\frac{A \cos v}{\sin v^2} + \frac{C^2}{\sin v^2}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist dann:

$$\sigma = \frac{A}{\sin v} - C_2 \cos v + C_3 \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{A}{\sin (l + c)} - C_2 \cot (l + c) + C_3;$$

aus den Gleichungen b) und c) ergiebt sich jetzt, da $l = Bm$ ist:

$$d\lambda = B \sin (l + c) dl, \quad d\mu = B \cos (l + c) dl,$$

oder:

$$\lambda = h - B \cos (l + c), \quad \mu = k + B \sin (l + c),$$

daraus folgt die schon bekannte Gleichung:

$$(\lambda - h)^2 + (\mu - k)^2 = B^2,$$

andererseits erhalten wir für σ:

$$\frac{\sigma(\mu - k)}{B} = A + C_3 \frac{(\mu - k)}{B} + \frac{(\lambda - h) C_2}{B}.$$

Man kann aber auch die Constanten h und k durch Coordinatentransformation zum Verschwinden bringen, und dann wird die Krümmungsgleichung unserer Curve:

$$\lambda^2 + \mu^2 = B^2,$$

und die Bogengleichung, wenn man auch die willkürliche Constante C_3 verschwinden lässt:

$$\sigma \mu = AB + C_2 \lambda$$

oder

$$\sigma \sqrt{B^2 - \lambda^2} = AB + c_2 \lambda.$$

Sucht man die kürzeste Linie auf dem Rotationskegel, so ist in der Gleichung $s = Al$: $ds = 0$, also $A = 0$ zu setzen und man hat:

$$\lambda^2 + \mu^2 = B^2, \quad \sigma = \frac{c_2 \lambda}{\sqrt{B^2 - \lambda^2}}.$$

§ 7.

Als zweites Beispiel betrachten wir den Fall, wo der Winkel v einen constanten Werth hat. Bekanntlich nennt man eine Curve, welche eine Schaar gegebener Linien unter gleichem Winkel schneidet, Trajectorie dieser Linien. Es handelt sich also hier um die Trajectorie aller Tangenten einer Curve doppelter Krümmung. Für den Fall, wo $v = \frac{\pi}{2}$ ist, haben wir dann die Evolvente dieser letzteren Curve.

Im allgemeinen Falle wird die Gleichung 3) des § 5, nämlich:

$$\frac{ds}{dl} - \sin v \frac{d^2\sigma}{dl^2} = 2 \frac{d\sigma}{dl} \cos v$$

leicht zu integriren sein. Wir erhalten das erste Integral:

$$s - \sin v \frac{d\sigma}{dl} = h + 2\sigma \cos v.$$

Setzen wir, wie im vorigen Paragraphen, in dieser linearen Gleichung $\sigma = pq$, also:

$$s - \sin v \left(p \frac{dq}{dl} + q \frac{dp}{dl}\right) = h + 2pq \cos v,$$

und nehmen dann den Factor von p gleich Null an, so haben wir die beiden Gleichungen:

$$-\sin v \frac{dq}{dl} = 2q \cos v, \quad s - \sin vq \frac{dp}{dl} = h.$$

Das Integral der ersteren ist:

$$\lg q = -2 \lg \cot v,$$

wenn wir die Constante gleich Null setzen, oder

$$q = e^{-2l \cot v},$$

dies in die zweite einsetzend erhalten wir:

$$s - h = e^{-2l \cot v} \sin v \frac{dp}{dl} \quad \text{oder} \quad (s - h) e^{2l \cot v} dl = dp \cdot \sin v,$$

und durch Integration:

$$p = \frac{1}{\sin v} \int^s s \cdot e^{2l \cot v} dl - \frac{h}{2 \cos v} e^{2l \cot v},$$

wo die Integrationsconstante in $\int s e^{2l \cot v} dl$ schon eingeschlossen ist, und wegen $\sigma = pq$ haben wir endlich:

I) $$\sigma = \frac{e^{-2l\cot v}}{\sin v}\int s \cdot e^{-2l\cot v}\,dl - \frac{h}{2\cos v}.$$

Ist aber die abwickelbare Fläche ein Cylinder, so haben wir nach § 5 3a:

Ia) $$s_1 = \sigma \sin v + h.$$

Bestimmen wir jetzt die Krümmungsgleichung der Trajectorie.

Die Gleichung 6) des § 5 giebt:

II) $$w + \mu = m \cos v + B$$

und die Gleichungen 4) und 5):

III) $$dl = \cos w d\lambda,$$

IV) $$d(m \sin v) = \sin w d\lambda.$$

Es folgt hieraus wie im vorigen Paragraphen, dass wenn man λ als Bogenlänge w oder $m \cos v - \mu$ als Tangentialwinkel einer ebenen Curve betrachtet, dass dann l und $m \sin v$ die rechtwinkligen Coordinaten dieser Curve vorstellen.

Ist die abwickelbare Fläche ein Cylinder, so hat man statt II), III) und IV):

IIa) $$\mu = m \cos v + B_1,$$

IIIa) $$w = \frac{\pi}{2},$$

IVa) $$\lambda = m \sin v + C,$$

aus IIa) und IVa) ergiebt sich dann:

$$\mu = (\lambda - c) \cot v + B_1,$$

also eine lineare Gleichung, d. h.:

Die Curve, welche die Seiten eines Cylinders unter gleichem Winkel schneidet, ist immer eine Schraubenlinie. (Dieser Satz enthält indess eigentlich nur die bekannte Definition der Schraubenlinien.)

Denken wir uns jetzt die abwickelbare Fläche mit ihrer Wendungskante und der Trajectorie ihrer Tangenten in die Ebene abgewickelt, so werden diese beiden Curven ihre Beziehung, die letztere nämlich als Trajectorie der Tangenten der ersteren, bezüglich als Evolvente und Evolute beibehalten, da Winkel v ebenso wie l hierbei unverändert bleibt, dann haben wir wegen § 5, 7: $\lambda_1 = l - v$ und wegen Gleichung I):

V) $$\sigma = \frac{e^{-2(\lambda_1 + v)\cot v}}{\sin v}\int s \cdot e^{2(\lambda_1 + v)\cot v}\,d\lambda_1 - \frac{h}{2\cos v}.$$

Und dies ist die Gleichung irgend einer Trajectorie für die Tangenten einer durch s und l gegebenen ebenen Curve. Wenn die Evolute dieser

ebenen Curve gesucht wird, also $v = \frac{\pi}{2}$ ist, so wird, da der Nenner des zweiten Gliedes unendlich ist, diese Formel illusorisch, die Gleichung 3 des § 5 giebt dann aber direct:

$$\frac{ds}{dl} = \frac{d^2\sigma}{dl^2},$$

d. h.:

$$s = \frac{d\sigma}{dl} + h$$

oder

$$\sigma = \int s dl - hl,$$

also auch:

V a)

$$\sigma = \int s d\lambda_1 - h\lambda_1,$$

nach 7 des § 5, wo $\int s d\lambda_1$ schon die Integrationsconstante enthält.

Machen wir von diesen Gleichungen einige Anwendungen zunächst auf ebene Curven.

Für den Kreis ist $s = rl = r(\lambda_1 + v)$ und Gleichung V) giebt durch Integration:

$$\sigma = \frac{r}{2 \cos v}\left(\lambda_1 + v - \frac{1}{2}\operatorname{tg} v\right) - \frac{h}{2 \cos v} + \varepsilon \, . \, e^{-2(\lambda_1 + v)\cot v},$$

wo ε eine Constante ist. Durch Coordinatentransformation kann man die Constanten $\frac{h}{2 \cos v}$, $v - \frac{1}{2}\operatorname{tg} v$ zum Verschwinden bringen und unsere Gleichung nimmt dann die einfachere Gestalt an:

$$\sigma = c\lambda_1 + c_1 e^{-\alpha\lambda_1},$$

wo $2 \cot v = \alpha$ gesetzt ist.

Für die Kreisvolvente ergiebt sich aus V a):

$$\sigma = \frac{r}{2}\lambda_1^2 - h\lambda_1 + c_1.$$

Suchen wir jetzt die Evolvente einer logarithmischen Spirale. Deren Gleichung ist: $s = Ae^{\alpha l}$, und die Gleichung V a) nimmt die Form an: $\sigma = ge^{\alpha\lambda_1} + g_1\lambda_1$. Die identische Form der entsprechenden Gleichungen zeigt nun:

Die Evolvente einer logarithmischen Spirale ist zugleich die Trajectorie der Tangenten eines Kreises. Sei ferner eine Epicycloide oder Hypercycloide gegeben. Die Gleichung dieser Curven war: $s = A \sin \alpha l$. Aus V a) ergiebt sich dann für die Evolventen eine Gleichung von der Gestalt: $\sigma = k \cos(\alpha\lambda_1) + k_1\lambda_1$.

Wir wollen jedoch wieder zu den allgemeineren Betrachtungen über Curven doppelter Krümmung zurückkehren.

Für die Schraubenlinie und den Rotationskegel können wir

$m = Al$ setzen, für die Trajectorie der Tangenten der ersteren und der Seiten des letzteren geben die Gleichungen III) und VI):

$$dl = \cos w d\lambda, \quad A \sin v dl = \sin w d\lambda, \quad \text{d. h. } \operatorname{tg} w = A \sin v,$$

es ist also w constant und wir erhalten $l = \lambda \cos w + c$.

Durch Gleichung II) erhalten wir dann:

$$\mu = m \cos v + c_1 = Al \cos v + c_1 = A\lambda \cos v \cos w + c_2,$$

also eine lineare Beziehung zwischen λ und μ, die betreffende Trajectorie ist ebenfalls eine Schraubenlinie.

Ist die ursprüngliche Schraubenlinie die gewöhnliche, so giebt sie nach § 6 mit ihren Tangenten abgewickelt einen Kreisbogen, und die dadurch mit abgewickelte Trajectorie wird also die der Tangenten eines Kreisbogens, d. h. die Evolvente der logarithmischen Spirale.

Suchen wir aber für diesen Fall noch denjenigen Cylinder, zu welchem die Trajectorie als kürzeste Linie gehört.

Die Gleichung der Kreistrajectorie:

$$\sigma = c\lambda_1 + c_1 e^{-\alpha\lambda_1},$$

giebt zunächst wieder

$$\lambda_1 = l - v + \text{const.}$$

(§ 5, 7), wo v constant ist, oder da zwischen l und λ eine lineare Beziehung stattfindet, bei angemessener Bestimmung der Constanten $\lambda_1 = a\lambda + b$ zu setzen, man kann also bei leichter Coordinatentransformation auch schreiben:

$$\sigma = h\lambda + ke^{-\alpha\lambda}.$$

Dies ist die Bogengleichung der betreffenden Trajectorie. Für denjenigen Cylinder, dessen kürzeste Linie sie ist, wollen wir in den Formeln d und e des § 6 $l', m', v' = l' + c$ bezüglich für l, m und v schreiben, dann erhalten wir $s_1 = \sigma \sin v'$, $\lambda = m' \sin v'$, diese Werthe werden in den hier gefundenen für σ eingesetzt, und wir erhalten eine Gleichung von ganz ähnlicher Form:

$$s_1 = h_1 m' + k_1 e^{-\alpha m'},$$

d. h. da m' die Linienkrümmung der Cylinderbasis ist:

Die Trajectorie der Tangenten der Schraubenlinie auf einem Rotationscylinder ist ebenfalls eine Schraubenlinie, aber auf einem Cylinder, dessen Basis die Evolvente einer logarithmischen Spirale ist.

Für die Trajectorie der Seiten eines Rotationskegels, wo $ds = 0$, s also constant ist, giebt Gleichung I):

$$\sigma = -\frac{h}{2\cos v} + \frac{Be^{-2(\lambda_1 + v)\cot v}}{\sin v},$$

d. h. wenn man durch Coordinatentransformation die Constante $-\frac{h}{2\cos v}$ zum Verschwinden bringt: $\sigma = ce^{-\alpha\lambda_1}$.

Dies ist die Gleichung der logarithmischen Spirale selbst.

Wir können nun ganz wie oben zeigen, dass, wenn man statt σ und λ' die Grössen s_1 und m' einführt, eine Gleichung von ganz derselben Form entsteht. Also:

Die Trajectorie der Seiten eines Rotationskegels ist eine Schraubenlinie auf einem Cylinder, welcher eine logarithmische Spirale zur Basis hat.

§ 8.

Wir wollen den Fall, wo $v = \frac{\pi}{2}$ ist, d. h. die Evolventen einer gegebenen Curve zu bestimmen sind, jetzt noch besonders betrachten; in diesem Falle geben die Formeln I) bis IV) des vorigen Paragraphen:

Ib) $$\sigma = \int s dl - hl,$$

IIb) $$w + \mu = B,$$

IIIb) $$dl = \cos(B - \mu) d\lambda,$$

IVb) $$dm = \sin(B - \mu) d\lambda.$$

Da man für $B - \mu$ durch Coordinatenverwandlung auch μ schreiben kann, nämlich wenn man nach Wegschaffung der Constante B, μ in entgegengesetzter Richtung nennt, so zeigen diese Formeln an:

Wenn λ als Bogenlänge, μ als Tangentenwinkel einer ebenen Curve betrachtet werden, so sind l und m die rechtwinkligen Coordinaten derselben.

Ist z. B. die Evolute eine Schraubenlinie, also $m = l \operatorname{tg} \alpha$, so geben die Gleichungen IIb) und IIIb) $w = B - \mu = \alpha$, also μ constant, die Evolvente ist somit eine ebene Curve, ferner:

$$\lambda = \frac{l - k}{\cos \alpha}.$$

Sei noch $s = Al$, also die Schraubenlinie eine gewöhnliche, so ist wegen Ib)

$$\sigma = \frac{Al^2}{2} - h = \frac{A_1\lambda^2}{2} - h_1\lambda - k,$$

d. h. die Evolvente ist eine Kreisevolvente.

Sei jetzt die Evolute aber die kürzeste Linie auf derjenigen abwickelbaren Fläche, deren Wendungskante die allgemeine Schraubenlinie ist. Wir erhielten in § 6, wo für λ, μ hier l und m zu schreiben ist, nach Transformation der Coordinaten dann $l^2 + m^2 = \alpha^2$, dies

ist die Gleichung eines Kreises und wir erhalten dann die Gleichung zwischen Bogenlänge und Tangentenwinkel $\lambda = \alpha\mu$; die Evolvente ist also eine Schraubenlinie.

Ausserdem erhalten wir für die rechtwinkligen Coordinaten l, m des Kreises, dessen Radius α ist, und dessen Gleichung, wie oben bemerkt, mit unserer Krümmungsgleichung übereinstimmt, wegen $\lambda = \alpha\mu$:

$$l = \alpha \sin \frac{\lambda}{\alpha}, \quad m = \alpha \cos \frac{\lambda}{\alpha} \cdot$$

Suchen wir noch den Cylinder, auf welchem sich diese Schraubenlinie befindet.

Die Gleichungen b), c), d) des § 6 ergeben, wenn man wieder l', m' für l und m schreibt:

$$ds_1 = d\sigma \sin (l' + c), \quad d\lambda = \sin (l' + c)\, dm', \quad d\mu = \cos (l' + c)\, dm',$$

$l' + c$ ist constant, die Integrale ergeben also lineare Beziehungen zwischen s_1 und σ, λ und m', μ und m'. Aus diesen Gleichungen und I b) ergiebt sich dann die Lösung unserer Aufgabe.

Wir betrachten z. B. den Fall, wo die Evolute die kürzeste Linie auf derjenigen Fläche sei, welche zur Wendungskante die gewöhnliche Schraubenlinie hat. In § 6 hatten wir für diese kürzeste Linie die Gleichung $\sigma\mu = AB + c_2\lambda$ gefunden. Jetzt ist in dieser Gleichung σ, μ bezüglich mit s, m, B mit α zu vertauschen, also:

$$sm = A\alpha + c_2 l;$$

diese Gleichung in Verbindung mit $m^2 + l^2 = \alpha^2$ I b) giebt dann:

$$\sigma = \int \frac{A\alpha + c_2 l}{\sqrt{\alpha^2 - l^2}}\, dl - hl,$$

d. h. durch Integration:

$$\sigma = A\alpha \text{ arc sin } \frac{l}{\alpha} - c_2 \sqrt{\alpha^2 + l^2} - hl + k,$$

oder wenn man für l seinen Werth $\alpha \sin \frac{\lambda}{\alpha}$ setzt:

$$\sigma = A\lambda - c_2\alpha \cos \frac{\lambda}{\alpha} - h\alpha \sin \frac{\lambda}{\alpha} + k.$$

Da zwischen λ und m' eine lineare Beziehung stattfindet, ebenso zwischen s_1 und σ, so kann man mit anderer Bezeichnung der Constanten, und wenn man zwei derselben durch Transformation wegschafft, schreiben:

$$s_1 = am' + b \cos \varepsilon m' + c \sin \varepsilon m',$$

oder

$$s_1 = am' + g \sin (\varepsilon m' + f),$$

eine Gleichung, die nach § 7 die Evolvente einer Hypercycloide oder Epicycloide ergab. Also:

Die Evolvente der kürzesten Linie auf derjenigen abwickelbaren Fläche, welche zur Wendungskante eine gewöhnliche Schraubenlinie hat (und wie leicht einzusehen, auch die Evolvente der kürzesten Linie auf dem Rotationskegel), ist eine Schraubenlinie auf einem Cylinder, dessen Basis die Evolvente einer Epicycloide oder Hypercycloide ist.

§ 9.

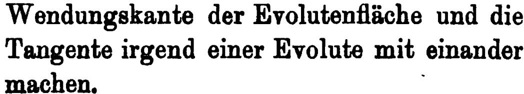
Beschäftigen wir uns noch mit den Beziehungen zwischen den einzelnen Evoluten einer Curve und der Evolutenfläche, sowie mit der Wendungskante dieser letzteren. Es mögen sich die Grössen L, M, S als bezügliche Linienkrümmung, Flächenkrümmung und Bogenlänge auf die Evolutenfläche, die ja immer eine abwickelbare ist, beziehen, l, m, s für die Evolute und λ, μ, σ für die Evolvente gelten. Die Evolutenfläche ist nun die Einhüllungsfläche einer Schaar von Ebenen, die auf den Elementen der Evolventenfläche senkrecht stehen, mithin ist der Winkel zweier aufeinander folgender dieser Ebenen, d. h. derjenige, den zwei aufeinander folgende Krümmungsebenen der Wendungskante machen, gleich $d\lambda$, also $dM = d\lambda$; oder mit angemessener Bestimmung der Constanten $M = \lambda$.

Da ferner der Durchschnitt zweier dieser Ebenen, d. h. die Tangente der Wendungskante auf der Ebene zweier aufeinander folgenden Elemente der Evolvente, also auf ihrer Krümmungsebene senkrecht steht, so ist auch: $dL = d\mu$, $L = \mu$. D. h. in Bezug auf Evolvente und Wendungskante der Evolutenfläche sind Linien- und Flächenkrümmung zu vertauschen. Die Gleichungen IIIb) und IVb) des vorigen Paragraphen geben daher:

$$dl = \cos(B - L)\,dM, \quad dm = \sin(B - L)\,dM.$$

Suchen wir noch den Winkel V, welchen die Tangente der Wendungskante der Evolutenfläche und die Tangente irgend einer Evolute mit einander machen.

Fig. 12.



Seien ACE (Fig. 12) zwei nächste Elemente der Evolvente, AB, CD, ED die drei durch ihre Endpunkte gehenden Tangenten einer Evolute, BF und DF die zugehörigen Tangenten an die Wendungskante der Evolutenfläche, dann ist Winkel $FBD = V$, der Winkel zwischen den Ebenen BAC und ACE, d. h. zwischen den Krümmungsebenen der Evolvente und Evolute, und dieser Winkel, der § 5 mit w bezeichnet wurde, war (§ 8)

$w = B - \mu$, und da BF auf Ebene ACE senkrecht steht, der Winkel zwischen BF und Ebene $ABC = \frac{\pi}{2} + \mu - B$. Ebene BFC steht auf AC, also auf Ebene ABC senkrecht, also ist BC oder BD die Projection von BF auf BAC und Winkel FBD oder V der Neigungswinkel von BF zu Ebene BAC, also $V = \frac{\pi}{2} + \mu - B$. Setzt man also in die allgemeine Formel 3) des § 5 S für s, s für σ, L für l, V für v, so ergiebt sich:

$$\frac{dS}{dL} - \cos(B - L)\frac{d^2 s}{dL^2} = 2\sin(B - L)\frac{ds}{dL},$$

wozu noch die schon gefundenen Formeln kommen:

IIc) $\qquad dl = \cos(B - L)\,dM.$

IIIc) $\qquad dm = \sin(B - L)\,dM.$

Diese Gleichungen geben die Beziehung der Wendungskante der Evolutenfläche zu einer Evolute. Ihre Uebereinstimmung mit den Formeln des § 6 für die kürzesten Linien giebt einen andern Beweis für den bekannten Satz, dass die Evoluten kürzeste Linien auf der Evolutenfläche sind, was freilich auch schon daraus folgt, dass der Winkel zwischen BAC und BFD ein rechter ist.

§ 10.

Wir wollen noch eine andere abwickelbare Fläche betrachten, die zu den hier behandelten Curven und Flächen in einfacher Beziehung steht.

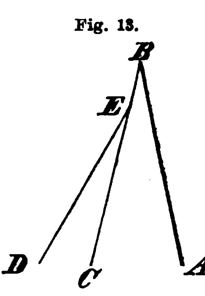
Denken wir uns eine Berührungsebene einer abwickelbaren Fläche, welche letztere wir mit A bezeichnen wollen, so um die in ihr enthaltene Erzeugungslinie gedreht, dass sie mit der nächsten Berührungsebene zusammenfällt, diese dann um die in ihr enthaltene Erzeugungslinie gedreht, bis sie mit der nächsten Berührungsebene zusammenfällt, u. s. w., so beschreibt jede z. B. die erste Erzeugungslinie eine andere abwickelbare Fläche, welche aus unendlich kleinen Theilen der Mäntel von Rotationskegeln besteht (oder, was dasselbe ist, aus unendlich kleinen Stücken der Tangentialebenen dieser Kegel). Diese abwickelbare Fläche wollen wir mit B bezeichnen, wir können sie die abwickelnde Fläche der Fläche A nennen. Die Wendungskante der Flächen A und B wollen wir kurz als Curven A und B bezeichnen.

L, M, S sollen die Coordinaten der Curve und Fläche A, L_1, M_1, S_1 die der Curve und Fläche B sein. Letztere Fläche enthält offenbar

je eine Evolvente aller auf Fläche A befindlichen kürzesten Linien. (Siehe den vorigen Paragraphen.)

Sei jetzt (Fig. 13) DE diejenige Erzeugungslinie der Fläche A, welche die Fläche B beschreibt, in irgend einer Lage, welche sie bei dieser Bewegung annimmt, CE dieselbe Erzeugungslinie in ihrer nächstfolgenden Lage, BA diejenige Erzeugungslinie, um welche die momentane Drehung erfolgt, dann ist Winkel $CBA = L$, wenn man nämlich für diejenige Erzeugungslinie von Curve A, welche die Fläche B beschreibt, $L = 0$ setzt, der unendlich kleine Theil des Kegelmantels oder, was dasselbe ist, die Ebene DEC steht ferner auf dem Axenschnitte CBA senkrecht, d. h. die Krümmungsebene der Curve B schneidet die Curve A senkrecht. Diese letztere, d. h. die Punkte E, B u. s. w. liegen auch auf der Fläche B, da sie bei den bezüglichen Drehungen ihren Ort nicht ändern, also ist Curve A eine kürzeste Linie der Fläche B. Es gelten daher die Gleichungen des § 6. In der That muss in den Gleichungen des § 5 $w = \frac{\pi}{2}$ und v d. h. Winkel CBA gleich L gesetzt werden; die entsprechenden Gleichungen werden dann:

Fig. 13.



$$\frac{dS}{dL} - \sin L \frac{d^2 S_1}{dL^2} = 2 \frac{dS_1}{dL} \cos L,$$

$$dL_1 = \sin L dM,$$

$$dM_1 = \cos L dM.$$

Es ist also in den Formeln des § 6 nur $c = 0$ gesetzt.

Für den Cylinder ist übrigens immer $L = 0$, weil L von einer Seite des Cylinders aus gezählt wird und diese mit jeder andern den Winkel Null macht. Dann ist $L_1 =$ const., also die abwickelnde Fläche B ebenfalls ein Cylinder. Irgend ein Punkt der Basis des Cylinders A beschreibt dann offenbar die Basis des Cylinders B und diese letztere Basis ist also immer eine Evolvente der ersteren.

Ist Fläche A ein Kegel, also $dS = 0$, so giebt die Integration der Gleichung für S_1:

$$\frac{dS_1}{dL} = \frac{C}{\sin L^2} S_1 = C_1 - C \cot L.$$

Für den Rotationskegel ist $M = AL$, also bei angemessener Bestimmung der Constanten:

$$L_1 = -A \cos L, \quad M_1 = -A \sin L,$$

also $$L = \text{arc cos} - \left(\frac{L_1}{A}\right), \quad \cot L = \frac{\cos \text{arc cos}\left(-\frac{L_1}{A}\right)}{\sin \text{arc cos}\left(-\frac{L_1}{A}\right)},$$

oder $$\cot L = -\frac{L_1}{\sqrt{A^2 - L_1^2}};$$

es ergiebt sich also die Gleichung für S_1:

$$S_1 = C_1 - \frac{CL_1}{\sqrt{A^2 - L_1^2}}.$$

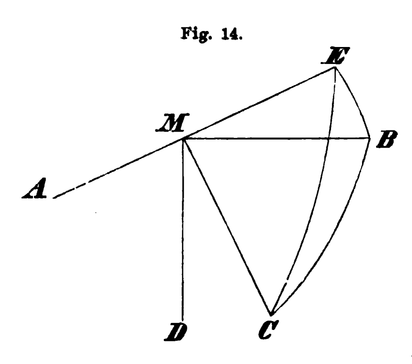
Ergänzungen zur Theorie der Flächenkrümmung.

§ 11.

Wir geben zunächst noch einige Hülfssätze, die sich an den in § 2 dieses Anhangs gegebenen anschliessen.

A) Mögen sich zwei Curven auf einer Fläche (Fig. 14) im Punkte M derselben schneiden, so sind die Winkel AMC und BMC, welche zwei aufeinander folgende Elemente AM und BM der einen mit dem Elemente CM der andern machen, offenbar um ein unendlich Kleines erster Ordnung von zwei Rechten unterschieden; ist aber die Curve AMB eine geodätische, so ist dieser Unterschied unendlich klein von der zweiten Ordnung, kann also immer, wenn es sich um solche Grössen erster Ordnung handelt, vernachlässigt werden*).

Fig. 14.



Beweis. AM, BM sind zwei aufeinander folgende Elemente der ersten, CM eins der zweiten Curve. Wir ziehen in M die Normale MD und die geradlinige Fortsetzung ME von MA. Ist MB nun die geodätische Fortsetzung von AM, so bilden MC und MB eine Tangentialebene, welche auf der Krümmungsebene BME der geodätischen Linie AMB vermöge der Grundeigenschaften der geodätischen Linie senkrecht steht. Das sphärische Dreieck EBC ist also bei B rechtwinklig und man hat: $\cos EC = \cos BC \cos BE$. Mit Berücksichtigung des unendlich kleinen BE ergiebt sich hieraus:

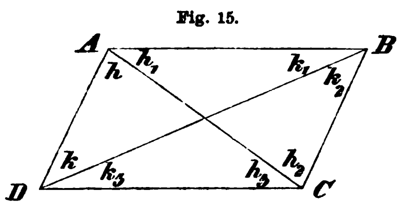
$$\cos BC = \frac{\cos EC}{1 - \frac{BE^2}{2}} = \cos EC\left(1 + \frac{CE^2}{2}\right),$$

*) Vergleiche § 1 des Anhanges.

sodass die Cosinus von BC und EC, also auch diese Grössen selbst, nur um ein unendlich Kleines zweiter Ordnung voneinander verschieden sind; da nun EC oder Winkel EMC das Supplement von AMC ist, so hat man auch $AMC + BMC = \pi$ bis auf ein unendlich Kleines zweiter Ordnung.

B) Wir betrachten in dem Folgenden ein Tetraeder (Fig. 15), dessen Ebenenwinkel bei AC und BD sich nur unendlich wenig von zwei Rechten unterscheiden, das also durch unendlich geringe Deformation eines ebenen Vierecks $ABCD$ entstanden gedacht werden kann. Es kommt hierbei auf die Länge der Seiten des Vierecks nicht an, dieselben können auch verschwindend klein sein, nur darf dann bei der Deformation jede dieser Seiten sich nur um ein verschwindend Kleines im Verhältniss zu ihrer ursprünglichen Länge ändern. Als so entstandene Tetraeder kann man z. B. diejenigen Vierecke auf einer Fläche betrachten, in welche dieselbe durch zwei Schaaren von Curven getheilt wird, und in diesem Falle unterscheiden sich diese Vierecke nur um ein verschwindend Kleines von Parallelogrammen, und können also als durch Deformation von solchen entstanden gedacht werden.

Fig. 15.



Wir denken uns jedoch zunächst ein beliebiges Viereck als ursprüngliche Gestalt. Seien die Winkel der Dreiecks-Ebene bei AC und BD bezüglich gleich $\pi - \eta$ und $\pi - \eta_1$. Die Winkel der Seiten mit den Diagonalen bei A seien h und h_1, die bei B, C und D bezüglich k_1 und k_2, h_2 und h_3, k_3 und k, die Flächenwinkel bei DA, AB, BC, CD bezüglich ε, ε_1, ε_2, ε_3. Es sind dann: ε, ε_1, ε_2, ε_3 unendlich kleine Grössen, ferner seien die Winkel DAB, ABC, BCD, CDA bezüglich:

$$\alpha = h + h_1 - \tau, \quad \beta = k_1 + k_2 - \tau_1, \quad \gamma = h_2 + h_3 - \tau_2,$$
$$\delta = k_3 + k - \tau_3,$$

also $\tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ ebenfalls verschwindend klein.

Für die dreikantige Ecke bei A haben wir dann:

$$\sin \varepsilon \sin h = \sin \varepsilon_1 \sin h_1,$$
$$\cos h \cos h_1 - \sin h \sin h_1 \cos \eta = \cos (h + h_1 - \tau),$$

oder mit Hinweglassung der Grössen dritter Ordnung:

1) $$\varepsilon \sin h = \varepsilon_1 \sin h_1,$$

2) $$\tau = \frac{\eta^2}{2} \cdot \frac{\sin h \sin h_1}{\sin \alpha},$$

da hier $\sin(h + h_1)$ durch $\sin\alpha$ ersetzt werden kann. Es ist also τ verschwindend klein von zweiter Ordnung. Ferner ist:

$$\sin\varepsilon \sin\alpha = \sin\eta \sin h_1,$$

also unter gleicher Annahme:

$$3) \qquad \eta = \frac{\varepsilon \sin\alpha}{\sin h_1} = \frac{\varepsilon_1 \sin\alpha}{\sin h},$$

und daher:

$$4) \qquad \tau = \frac{\varepsilon^2 \sin\alpha \sin h}{2 \sin h_1} = \frac{\varepsilon_1^2 \sin\alpha \sin h_1}{2 \sin h} = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_1 \sin\alpha.$$

In gleicher Weise erhält man für die Ecken bei B, C, D:

$$5) \qquad \tau_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin\beta}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3 \sin\gamma}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\varepsilon_3 \varepsilon \sin\delta}{2}$$

und ebenso entspricht der Gleichung 1):

$$6) \quad \varepsilon_1 \sin k_1 = \varepsilon_2 \sin k_2, \quad \varepsilon_2 \sin h_2 = \varepsilon_3 \sin h_3, \quad \varepsilon_3 \sin k_3 = \varepsilon \sin k.$$

Nehmen wir nun den Fall, dass das Tetraeder durch Deformation eines Parallelogramms entstanden sei, wie dies bei dem Curvenviereck auf einer Fläche der Fall ist, so ist in den Formeln 2) und 5) $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \sin\delta$ zu setzen; wenn man unendlich kleine Grössen dritter Ordnung nicht beachtet, dann ist:

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}, \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}, \quad \frac{\tau_2}{\tau_3} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}, \quad \frac{\tau_3}{\tau} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}.$$

und ebenso ist bei Vernachlässigung des unendlich Kleinen

$$h = h_2, \quad h_1 = h_3, \quad k = k_2, \quad k_1 = k_3,$$

also wegen 1) und 6):

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}, \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon},$$

woraus sich ergiebt, da die Grössen $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ positiv sind:

$$\varepsilon_2^2 = \varepsilon^2, \quad \varepsilon_3^2 = \varepsilon_1^2, \quad \text{also} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_1,$$

und:

$$\tau = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{2} \sin\alpha,$$

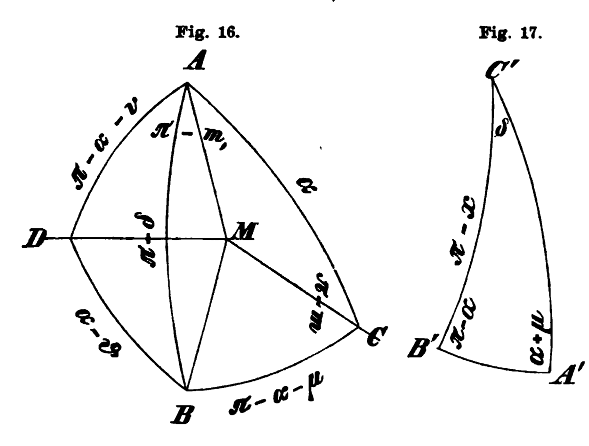
also $h + h_1 - \alpha = k_1 + k_2 - \beta = h_2 + h_3 - \gamma = k_3 + k - \delta$, wenn die unendlich kleinen Grössen dritter Ordnung nicht beachtet werden.

C) Zwei Curven auf einer Fläche mögen sich im Punkte M derselben schneiden. Je zwei nächste der vier Elemente derselben, die durch Punkt M gehen, bilden dann vier Winkel, deren Unterschied von vier Rechten unendlich klein ist, dieser Unterschied soll berechnet werden. Seien (Fig. 16) AMB, CMD diese Elemente,

$$\text{Winkel } AMC = \alpha, \quad BMC = \pi - \alpha - \mu,$$

$$\text{Winkel } AMD = \pi - \alpha - \nu, \quad DMB = \alpha - \vartheta,$$

wo also μ, ν und ϑ unendlich kleine Grössen sind; in dem sphärischen Vierecke $ACBD$ sei ferner der Winkel C, oder der Ebenenwinkel bei $CM = \pi - m$, der Ebenenwinkel A, oder der Ebenenwinkel bei $AM = \pi - m_1$, wo m und m_1 ebenfalls unendlich klein sind. Möge ferner der Winkel $CAB = x$, also $DAB = \pi - m_1 - x$ und der Winkel $AMB = \pi - \delta$ sein.



Statt des Dreiecks ABC betrachten wir nun (Fig. 17) sein Supplementardreieck $A'B'C'$, hier ist $B'A' = m$, $B'C' = \pi - x$, Winkel $B' = \pi - \alpha$, Winkel $A' = \alpha + \mu$, Winkel $C' = \delta$. Dies Dreieck gehört unter die in § 2 behandelten, und es giebt die Formel 8) dieses Paragraphen, wenn man die dort enthaltenen Grössen: ε, β, c, γ bezüglich vertauscht mit: $-\mu$, δ, $\pi - x$, $\pi - \alpha$:

$$\mu = \delta \cos x - \frac{\delta^2}{2} \cot \alpha \, (\sin x)^2.$$

Betrachtet man aber statt des Dreiecks ACB das Dreieck ADB, so ist in dieser Formel zu setzen statt α, $\alpha + \mu$, x bezüglich:

$$\pi - \alpha - \nu, \quad \pi - \alpha + \vartheta, \quad \pi - m_1 - x,$$

während δ unverändert bleibt, man hat also:

$$\nu + \vartheta = -\delta \cos (x + m_1) + \frac{\delta^2}{2} \cot (\alpha + \nu) \sin (x + m_1)^2,$$

d. h. wenn man bis zu unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung fortschreitet:

$$\nu + \vartheta = -\delta \cos x + m_1 \delta \sin x + \frac{\delta^2}{2} \cot \alpha \sin x^2.$$

Aus Fig. 16 aber ergiebt sich unmittelbar:

$$\delta \sin x = m \sin (\alpha + \mu),$$

also wieder bis zu den Gliedern zweiter Ordnung genau:

$$\nu + \vartheta = -\delta \cos x + m m_1 \sin \alpha + \frac{\delta^2}{2} \cot \alpha \, (\sin x)^2,$$

also:
$$\mu + \nu + \vartheta = m m_1 \sin \alpha,$$

da der Unterschied zwischen $\sin (\alpha + \mu)$ und $\sin \alpha$ gegen die vorhandenen Grössen verschwindet. Der Ausdruck links ist offenbar

der Unterschied der vier Winkel um M von 2π, und dieser Unterschied ist also gleich $mm_1 \sin\alpha$, also unendlich klein von der zweiten Ordnung.

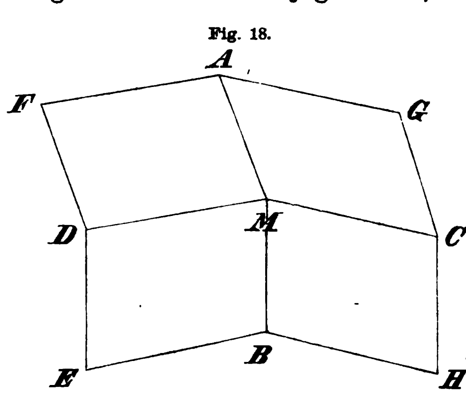
§ 12.

Andere Definition der Flächenkrümmung.

Die Gauss'che Definition der Flächenkrümmung war folgende: Man umgebe den Punkt M der Fläche mit einer unendlich kleinen geschlossenen Figur F, zu der Normalenschaar des Umfanges dieser Figur ziehe man Parallelen durch den Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius 1, welche auf der Oberfläche derselben eine zweite Figur φ abschneiden, die Krümmung der Fläche im Punkte M ist dann $\frac{\varphi}{F}$, wo F auf unendlich viele Arten gegeben sein kann. Wir wollen den Zähler dieses Ausdruckes φ als Krümmungselement, den Nenner F als Flächenelement bezeichnen. Dem Werthe von φ lässt sich nun mit Hülfe des vorigen Paragraphen auch eine andere Bedeutung geben.

Man denke sich die Fläche von zwei Schaaren continurlich aus einander entstehender Curven angefüllt, und dadurch in unendlich kleine Vierecke getheilt, die allerdings im Allgemeinen nicht als eben zu betrachten sind. Es wird jedoch zu jeder Schaar von Curven eine zweite derart bestimmt werden können, dass diese Vierecke eben sind, so nämlich, wie dies ja immer möglich ist, wenn nämlich allen Schnittpunkten zweier Curven aus den beiden Schaaren die Tangenten derselben conjugirte sind, also z. B. wenn beide Schaaren die Krümmungslinien der Fläche sind. Für das Flächenelement F kann man dann den Inhalt eines solchen Vierecks $AMCG$ (Fig. 18) setzen. Bestimmen wir das Krümmungselement φ, dasselbe wird auf der Kugel ebenfalls ein unendlich kleines Viereck φ abschneiden, welches folgendermassen entsteht. Zieht man in C, M und A Normalen an die Fläche, so ist der Winkel, welche die in C und M gegebenen mit einander machen die eine, der welchen die in A und M gezogenen machen, die anstossende Seite des Vielecks φ. Nun sind aber Viereck $AMCG$ und die anstossenden $AMDF$, $MCHB$, da sie eben sind, zugleich

Fig. 18.



aufeinander folgende Tangentialebenen der Fläche, bilden also dieselben Winkel wie ihre Normalen. Identificirt man also nun die vierkantige Ecke um M mit der in § 11c betrachteten, so fallen die beiden anstossenden Seiten von φ mit den dort mit m und m_1 bezeichneten Grössen zusammen. Der Winkel zwischen diesen Seiten lässt sich aber leicht finden; es ist derjenige, den die Ebenen mit einander machen, welche einerseits den in C und M, anderseits den in A und M errichteten Normalen parallel sind. Die erste dieser Ebenen steht auf $AMCG$ und $AMDF$, also auch auf ihrem Durchschnitte AM, die zweite auf $AMCG$ und $MCHB$, also auf ihrem Durchschnitte MC senkrecht; der Winkel zwischen den Seiten m und m_1 von φ ist also der Winkel AMC, welcher § 11c mit α bezeichnet war, und da die beiden Dreiecke, in welche φ zerfällt, sich offenbar nur um eine gegen ihren Inhalt verschwindende Grösse unterscheiden, ergiebt sich $\varphi = mm_1 \sin \alpha$, also gleich dem Unterschiede der vier Winkel um M von 2π. Also: Theilt man eine Fläche durch zwei Curvenschaaren, die in allen Schnittpunkten conjugirte Tangenten haben, in unendlich kleine Vierecke, so ist die Krümmung im Punkte M gleich dem Unterschiede der vier Winkel um M von 2π, dividirt durch den Inhalt eines solchen Vierecks.

§ 13.

Der eben gegebenen Definition entnehmen wir zunächst einen neuen Beweis und zugleich eine Erweiterung des Gauss'schen Satzes für die Totalkrümmung eines Dreiecks auf einer Fläche. Diese Erweiterung schliesst sich genau an die § 1 gegebene Darstellung des Inhaltes eines Dreieckes auf einer Kugel an, wenn die Seiten desselben beliebige Curven sind.

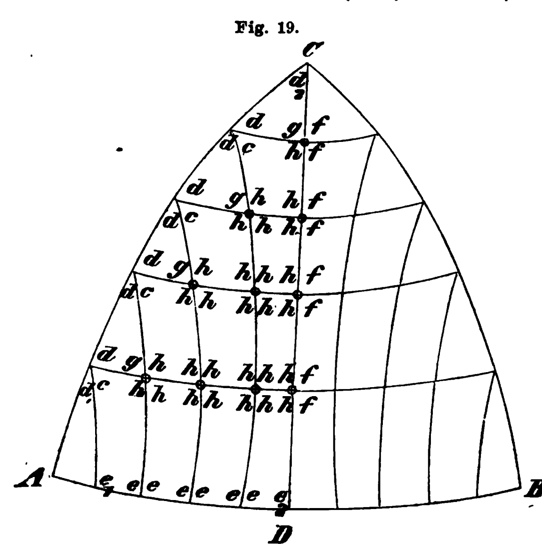
Sei auf einer Fläche (Fig. 19) ein Dreieck ABC gegeben, so können wir den Inhalt desselben durch zwei Curvenschaaren in unendlich kleine ebene Vierecke auf die mehrfach angegebene Art eintheilen. Da das aber auf unendlich viele Arten geschehen kann, so können wir sogar annehmen, dass eine Seite derselben AB zu der einen Curvenschaar gehöre, die durch die Spitze C des Dreiecks gezogene der zweiten Curvenschaar angehörige Linie CD theilt das Dreieck in zwei andere ACD und BCD, von denen wir zunächst nur das erste betrachten. Die Totalkrümmung desselben ist gleich der Summe der zu den in der Figur mit kleinen Kreisen umgebenen vierkantigen Ecken gehörigen Grössen φ, also, wenn wir einen der Winkel dieser Ecken mit k bezeichnen, und die Anzahl der Ecken gleich n annehmen:

$$\text{Totalkrümmung} = 2n\pi - \Sigma k.$$

Diese Summe Σk setzt sich aber zusammen aus den Winkeln h, welche zu den im Dreiecke gelegenen, unendlich kleinen Vielecken gehören, deren Anzahl ebenfalls n ist, von denen jedoch die an AD gelegenen mit e bezeichneten abzuziehen, und die an CD gelegenen mit f bezeichneten hinzuzunehmen sind; es kommen ferner die Winkel g, welche den über AC errichteten Elementardreiecken angehören, hinzu, und fallen die Winkel c, welche den an AC grenzenden Viereckskanten angehören, weg, sodass man hat:

$$\Sigma k = \Sigma h + \Sigma f - \Sigma e + \Sigma g - \Sigma c.$$

Fig. 19.



Nun ist $\Sigma h = 2n\pi$, zwei der Winkel f ergänzen sich zu dem stumpfen Winkel, den zwei aufeinander folgende Elemente von CD mit einander machen. Ein solcher Winkel ist aber nach § 11 A) das Supplement desjenigen, welchen die geodätische Fortsetzung eines Elementes mit dem nächstfolgenden macht, denn setzt man das eine Element geodätisch fort, so macht dasselbe mit seiner Fortsetzung nach dem angeführten Paragraphen den Winkel π, abgesehen von unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung; ist also $d\vartheta$ der Winkel der geodätischen Fortsetzung eines Elementes mit dem nächstfolgenden, s die Anzahl der vierkantigen Ecken, die in CD ihre Scheitelpunkte haben, so hat man $\Sigma f = s\pi - \Sigma_1 d\vartheta$, wo Σ_1 sich auf die Theile von CD erstreckt. Aus demselben Grunde addiren sich die Winkel e mit Ausnahme des ersten e_1 und des letzten e_2 zu $(s-1)\pi - \Sigma_2 d\vartheta$, wenn Σ_2 sich auf die Theile von AD bezieht. Es ist aber e_2 gleich dem Winkel CDA und $e_1 = CAD + d_1$, wenn unter d alle an AC anstossenden Winkel zu verstehen sind und der erste derselben mit d_1 bezeichnet wird, es ist also:

$$\Sigma e = (s-1)\pi - \Sigma_2 d\vartheta + CDA + d_1 + DAC.$$

Was die Winkel g anbetrifft, so wird jeder von zweien der Winkel d zu zwei Rechten ergänzt, wo nur der erste Winkel d, nämlich d_1 nicht vorkommt, somit ist: $\Sigma g = \Sigma(\pi - d) + d_1$.

Je zwei der Winkel d, mit Ausschluss von d_2, bilden aber mit dem entsprechenden Winkel c den stumpfen Winkel zweier aufeinander folgenden Elemente von AC, für den man wieder $\pi - d\vartheta$ setzen kann, so dass man hat:

$$\Sigma(\pi - d) = \Sigma c + \Sigma_3 d\vartheta - d_2,$$

$$\Sigma g = \Sigma c + \Sigma_3 d\vartheta + d_1 - d_2,$$

wo Σ_3 auf die Theile von AC geht. Setzt man die so gefundenen Werthe in die von Σk ein, so erhält man:

$$\Sigma k = 2n\pi + \pi - \Sigma_1 d\vartheta + \Sigma_2 d\vartheta + \Sigma_3 d\vartheta - CAD - ACD - ADC,$$

wenn man berücksichtigt, dass $d_2 = ACD$ ist.

Man hat endlich:

$$\text{Totalkrümmung von } ACD = CAD + ACD + ADC - \pi + \Sigma_1 d\vartheta - \Sigma_2 d\vartheta - \Sigma_3 d\vartheta.$$

Bestimmt man ebenso die Totalkrümmung des Dreiecks DCB, so werden statt Σ_2 und Σ_3 die auf DB und CB bezüglichen Summen für $\Sigma_1 d\vartheta$, aber dieselbe Summe mit entgegengesetztem Vorzeichen erscheinen, da in einem der Dreiecke ACD und BCD die geodätischen Verlängerungen der Elemente von DC in das Dreieck, im andern ausserhalb desselben fallen (vgl. § 1). Es werden also die beiden Summen von $\Sigma_1 d\vartheta$ in der Totalkrümmung von ABC sich aufheben, dem Winkel DAC wird im andern Dreiecke CBD, dem Winkel ACD, BCD entsprechen, man hat also, wenn die Winkel bei A, B und C noch mit α, β, γ bezeichnet werden:

$$\text{Totalkrümmung von } ABC = \alpha + \beta + \gamma - \pi - \Sigma d\vartheta,$$

wo $\Sigma d\vartheta$ auf alle drei Seiten des Dreiecks sich bezieht, dieselbe Formel, welche § 1 für den Inhalt eines von beliebigen Curven gebildeten Kugeldreieckes gefunden wurde. Ganz wie in § 1 kann man noch beweisen, dass

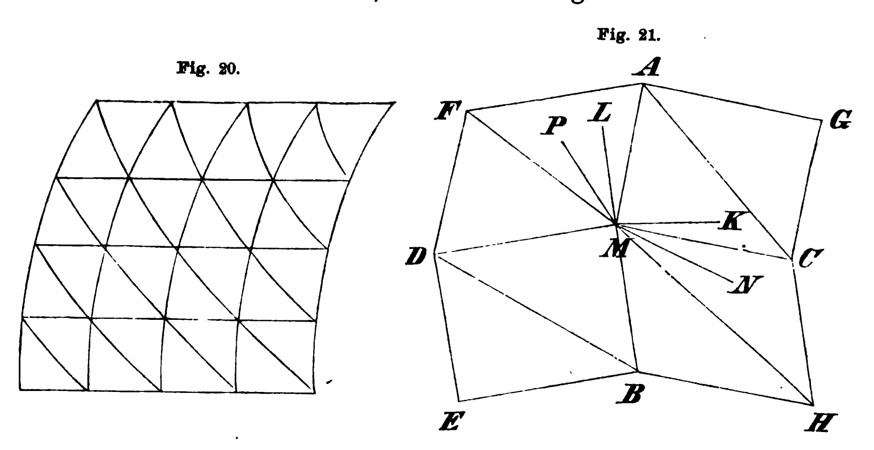
$$\Sigma d\vartheta = \int \sqrt{d\varphi^2 - \frac{ds^2}{r^2}}$$

ist, wo wie dort $d\varphi$ der Contingenzwinkel, ds das Bogenelement ist, r aber den Krümmungsradius der durch das betreffende Element ds gelegten geodätischen Linie bedeutet.

Sind endlich die Dreiecksseiten geodätische Linien, so ist $d\vartheta = 0$ und man hat den Gauss'schen Satz wieder.

§ 14.

Zum Abschluss dieser Betrachtungen wollen wir noch die neue Definition der Flächenkrümmung auch für den Fall erweitern, wo die Fläche in unendlich kleine aber nicht ebene Vierecke getheilt ist. Man denke sich also die Fläche zunächst durch zwei Curvenschaaren in Vierecke getheilt, die wir nicht als eben betrachten (Fig. 20), diese aber durch eine dritte Schaar, welche die Diagonalen zu sämmtlichen



Vierecken bilden, in unendlich kleine Dreiecke getheilt, die wir natürlich als eben betrachten können. In irgend einem Endpunkte M (Fig. 21) wird, wenn man die Diagonalen nicht beachtet, noch immer eine vierkantige Ecke von den Linien MD, MA, MC, MB entstehen, und der Unterschied dieser vier Winkel von 2π

$$= mm_1 \sin AMC$$

sein (§ 11 C), doch verliert diese Formel ihre Bedeutung als Krümmungselement, da die Vierecksebenen nicht mehr vorhanden sind, also nicht mit den Tangentialebenen zusammenfallen. Betrachten wir aber jetzt die sechskantige Ecke um M, die von den sechs darin zusammenstossenden Linien gebildet wird, und suchen wir die Beziehung derselben zum Krümmungselement φ, indem wir wieder das Viereck $AMCG$ oder die Summe der beiden Dreiecke, in welche es getheilt ist, als Flächenelement F betrachten. Zu dem Ende errichten wir in M, B und D Normalen, bezeichnen den Winkel, den die ersten beiden machen, mit n, und den, welchen die erste mit der dritten macht, mit n_1, ferner mit β den Winkel, welchen die den ersten beiden Normalen parallele und die der ersten und dritten parallele Ebene mit einander machen, so folgt ganz wie in § 12:

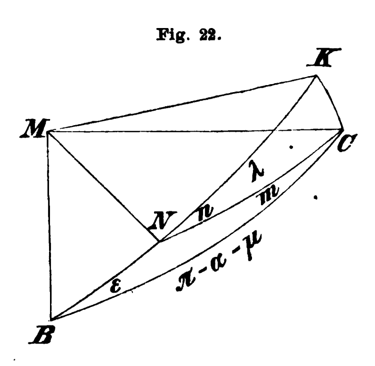
$$\varphi = nn_1 \sin \beta .$$

Die Normale in M steht nun auf der Dreiecksebene AMC, die in B auf der Ebene MBH, oder wenn wir MK parallel BH ziehen, auf der Ebene BMK senkrecht. Ebenso wird die Normale in D auf FMD, oder wenn ML parallel FD ist, auf LMD senkrecht stehen. Wenn wir unter MN die Schnittlinie der Ebenen AMC und KMB verstehen, so wird der Winkel der Ebenen AMC und KMB, oder der Winkel zwischen CMN und $KMN = n$, ebenso ist, wenn MP die Schnittlinie der Ebenen LMD und AMC, der Winkel zwischen AMP und $LMP = n_1$; ganz wie in § 12 beweisen wir auch, dass der Winkel PMN gleich β ist. Setzen wir also wie früher Winkel $AMC = \alpha$, und ausserdem

$$CMN = \lambda, \quad AMP = \lambda_1, \quad \text{so ist} \quad \beta = \lambda + \lambda_1 + \alpha,$$

wir wollen ferner wie in § 12 den spitzen Winkel zwischen AMC und CMB mit m, den zwischen AMC und AMD mit m_1 bezeichnen. Denkt man noch die Linie CB gezogen, so ist $MCHB$ ein Tetraeder wie das in § 11 B) betrachtete, und wir können wie dort den Winkel zwischen Ebene CMB und MBH, oder zwischen CMB und MBK mit ε, den zwischen AMD und LMD mit ε_1 bezeichnen.

Fig. 22.



Es macht hierbei nichts aus, dass die Winkel ε und ε_1 verschiedenen Tetraedern angehören, denn die auf dieselben bezüglichen Grössen weichen nur um solche Differenzen von einander ab, welche gegen diese Grössen selbst verschwinden, kommen also nur in Betracht bei Fragen, wo es sich um gegen diese Grössen unendlich Kleines handelt, was hier nicht der Fall sein wird. Betrachten wir zunächst die durch NKC und B gelegte sphärische Figur (Fig. 22), deren Mittelpunkt M ist, indem wir uns die Linien MB, MC, MN, MK als gleich vorstellen. Dann ist:

$$\text{Winkel } KNC = n, \quad NCB = m, \quad NBC = \varepsilon, \quad NC = \lambda,$$

und
$$BC = \pi - \alpha - \mu$$

(§ 11). Aus dem sphärischen Dreiecke BNC ergiebt sich dann:

$$\frac{\sin \lambda}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin (\alpha + \mu)}{\sin n}, \quad \text{d. h.} \quad \sin \lambda = \frac{\varepsilon \sin \alpha}{n},$$

und

$$\cot \lambda \sin (\alpha + \mu) - \sin m \cot \varepsilon = - \cos (\alpha + \mu) \cos \varepsilon,$$

woraus sich mit Weglassung der unendlich kleinen Glieder ergiebt:

$$\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}\sin\alpha = \frac{m}{\varepsilon} - \cos\alpha,$$

oder wenn man für $\sin\lambda$ den eben gefundenen Werth einsetzt:

$$\cos\lambda = \frac{m - \varepsilon\cos\alpha}{n}.$$

Auf dieselbe Weise findet man:

$$\sin\lambda_1 = \frac{\varepsilon_1\sin\alpha}{n_1}, \quad \cos\lambda_1 = \frac{m_1 - \varepsilon_1\cos\alpha}{n_1}.$$

Hieraus bestimmt man:

$$\sin(\lambda + \lambda_1) = \frac{\sin\alpha(\varepsilon m_1 + \varepsilon_1 m) - 2\varepsilon\varepsilon_2\sin\alpha\cos\alpha}{nn_1},$$

$$\cos(\lambda + \lambda_1) = \frac{mm_1 - \cos\alpha(\varepsilon m_1 + m\varepsilon_1) + \varepsilon\varepsilon_1(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{nn_1},$$

also:

$$nn_1\sin\beta = nn_1\sin(\alpha + \lambda + \lambda_1) = mm_1\sin\alpha - \varepsilon\varepsilon_1\sin\alpha.$$

Dies ist also der Ausdruck für das Krümmungselement φ.

Nun ist § 11 C):

$$mm_1\sin\alpha = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$

wenn wir:

$$AMC = \alpha, \quad CMB = \beta, \quad AMD = \gamma, \quad DMB = \delta$$

setzen; identificiren wir aber die Figuren $MCHB$ und $AMDF$ mit dem in § 11 B) betrachteten Tetraeder und setzen

$$\beta = k_1 + k_2 - \tau, \quad \gamma = h_2 + h_3 - \tau,$$

wo

$$BMH = k_1, \quad HMC = k_2, \quad DMF = h_2, \quad FMA = h_3$$

gesetzt wurde, so haben wir wie dort: $2\tau = \varepsilon\varepsilon_1\sin\alpha$.

Die Unterschiede der Werthe von τ, welche sich daraus ergeben, dass β und γ verschiedenen Tetraedern, die sich jedoch nur unendlich wenig von einander unterscheiden, angehören, verschwinden selbstverständlich gegen τ selbst, da der Unterschied nur von der dritten Ordnung ist. Die Summe der sechs Winkel der sechskantigen Ecke um M aber ist:

$$\alpha + k_1 + k_2 + h_2 + h_3 + \delta = \alpha + \beta + \gamma + \delta + 2\tau$$

und der Unterschied dieser Winkel von 2π ist gleich:

$$2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) - 2\tau = mm_1\sin\alpha - \varepsilon\varepsilon_1\sin\alpha = nn_1\sin\beta = \varphi.$$

Also:

Wird eine Fläche durch zwei Curvenschaaren in Vierecke und diese wieder durch eine dritte Curvenschaar in je zwei Dreiecke getheilt, so ist die Krümmung gleich dem Unterschiede der um einen Schnittpunkt herum liegenden sechs Dreieckswinkel von 2π, dividirt durch den Inhalt des anstossenden Vierecks.

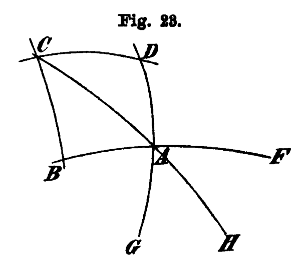
Hieraus folgt auch der Gauss'sche Satz, dass bei Flächen, die sich aufeinander abwickeln lassen, die Krümmung in den entsprechenden Punkten gleich ist, da sich hierbei die elementaren Dreiecke, also auch ihre Winkel nicht ändern.

Elementargrössen der Flächen.

§ 15.

In der Theorie der Curven in der Ebene sind eine elementare Liniengrösse, das Bogenelement, und eine solche Winkelgrösse, der Contigenzwinkel, von Wichtigkeit; bei doppelt gekrümmten Curven tritt noch der Winkel zweier unendlich nahen Krümmungsebenen hinzu. Bei Flächen wird die Anzahl solcher elementaren Grössen eine viel bedeutendere. Von diesen sind besonders zu merken: I. Liniengrössen: die Seiten und Diagonalen des durch A gelegten Elementarvierecks (Fig. 23), d. h. die sechs Seiten des mit diesem Vierecke zusammenfallenden Tetraeders; II. Winkelgrössen: die Kanten- und Ebenenwinkel dieses Tetraeders, sowie die Kanten- und Ebenenwinkel der vierkantigen Ecke um A, welche durch die Viereckseiten AB und AD und ihre Fortsetzungen auf der Fläche AF und AG gebildet sind, sowie die Kanten- und Ebenenwinkel der sechskantigen Ecke, die entsteht, wenn man die Diagonale AC und ihre Fortsetzung AH hinzunimmt. Es ist hierbei vorausgesetzt, dass AB und DC der Curvenschaar angehören, in welcher v constant bleibt, AB und DC derjenigen, worin u constant bleibt. Das Dreieck ABD bestimmt die Tangentialebene, AD und AB also sind Tangenten. Ein Differentiiren nach u bezeichnen wir mit d, ein solches nach v mit d_1, sei ferner $AB = ds$ und $AD = d_1 s_1$. Die Projection von AB auf die x-Axe ist dx, die von AD ist $d_1 x$, und Aehnliches gilt für die beiden andern Axen, es sind dann ferner:

Fig. 23.



$$DC = ds + d_1 ds, \quad BC = d_1 s_1 + d d_1 s_1$$

und die Projectionen dieser Linien auf die Axen bezüglich:

$$dx + d_1 dx, \quad d_1 x + d d_1 x \quad \text{u. s. w.}$$

Die Gleichungen in § 73 sind nun so zu schreiben:

$$dy d_1 z - dz d_1 y = A du dv,$$
$$dz d_1 x - dx d_1 z = B du dv,$$
$$dx d_1 y - dy d_1 x = C du dv,$$
$$A d^2 x + B d^2 y + C d^2 z = D du^2,$$

$$Add_1x + Bdd_1y + Cdd_1z = D'dudv,$$
$$Ad_1^2x + Bd_1^2y + Cd_1^2z = D''dv^2,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 = Edu^2,$$
$$dxd_1x + dyd_1y + dzd_1z = Fdudv,$$
$$d_1x^2 + d_1y^2 + d_1z^2 = d_1s_1^2 = Gdv^2.$$

Ausserdem setzen wir: $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2 = M^2$.

Noch ist:

$$dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = dsd^2s = \tfrac{1}{2}dEdu^2,$$
$$d_1s_1d_1^2s_1 = d_1xd_1^2x + d_1yd_1^2y + d_1zd_1^2z = \tfrac{1}{2}d_1Gdv^2,$$
$$dsd_1ds = dxd_1dx + dyd_1dy + dzd_1dz = \tfrac{1}{2}d_1Edu^2,$$
$$d_1s_1dd_1s_1 = d_1xdd_1x + d_1ydd_1y + d_1zdd_1z = \tfrac{1}{2}dGdv^2,$$
$$d_1xd^2x + d_1yd^2y + d_1zd^2z = dFdudv - \tfrac{1}{2}d_1Edu^2,$$
$$dxd_1^2x + dyd_1^2y + dzd_1^2z = d_1Fdudv - \tfrac{1}{2}dGdv^2,$$
$$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$
$$Ad_1x + Bd_1y + Cd_1z = 0.$$

Für die vier Seiten des Vierecks erhalten wir dann die Werthe:

$$AB^2 = ds^2 = Edu^2, \quad AD^2 = d_1s_1^2 = Gdv^2,$$
$$DC^2 = (ds + d_1ds)^2 = (E + d_1E)du^2, \quad BC^2 = (G + dG)dv^2,$$

wo die Glieder vierter Ordnung vernachlässigt sind. Die Projectionen dieser vier Linien auf die x-Axe sind bezüglich:

$$dx, \quad d_1x, \quad dx + d_1dx, \quad d_1x + d_1dx.$$

Die Projectionen auf die andern Axen ergeben sich ganz ähnlich.

Seien λ, μ, ν die Richtungscosinus von AB, λ_1, μ_1, ν_1 die von AD, also:

$$\lambda = \frac{dx}{ds}, \quad \lambda_1 = \frac{d_1x}{d_1s_1}$$

und ähnliche Werthe ergeben sich für μ, ν, μ_1, ν_1.

Für die Richtungscosinus von DC und BC erhält man dann bezüglich:

$$\lambda + d_1\lambda = \frac{dx}{ds} + d_1\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds} + \frac{dsd_1dx - dxd_1ds}{ds^2},$$
$$\lambda_1 + d_1\lambda = \frac{d_1x}{d_1s_1} + d\frac{d_1x}{d_1s_1} = \frac{d_1x}{d_1s_1} + \frac{d_1s_1dd_1x - d_1xdd_1s_1}{d_1s_1^2};$$

sind dann α, β, γ, δ die Winkel bezüglich bei A, B, C, D, so hat man:

$$\cos\alpha = \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1,$$

oder:

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} = \frac{M}{\sqrt{EG}},$$

wie schon früher gefunden und es ist, wenn man unendlich kleine Grössen nicht beachtet:

$$\alpha = \gamma = \pi - \beta = \pi - \delta.$$

Soll dagegen auf das unendlich Kleine erster Ordnung noch Rücksicht genommen werden, so erhalten wir:

$$-\cos\beta = \cos\alpha + \Sigma\lambda d\lambda_1 = \cos\alpha + \frac{\Sigma dx(d_1 s_1 dd_1 x - d_1 x dd_1 s_1)}{ds d_1 s_1^2},$$

$$\cos\gamma = \cos\alpha + \Sigma\lambda d\lambda_1 + \Sigma\lambda_1 d\lambda = \cos\alpha + \frac{\Sigma dx(d_1 s_1 dd_1 x - d_1 x dd_1 s_1)}{ds d_1 s_1^2} + \frac{\Sigma d_1 x(ds d_1 dx - dx d_1 ds)}{d_1 s_1 ds^2},$$

$$-\cos\delta = \cos\alpha + \frac{\Sigma d_1 x(ds d_1 dx - dx d_1 ds)}{d_1 s_1 ds^2}.$$

Das Summenzeichen geht auf drei Glieder, die durch Vertauschung von y und z mit x entstehen, Aus diesen Formeln erhalten wir:

$$-\cos\beta = \frac{F}{\sqrt{EG}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{du}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{F}{G\sqrt{EG}}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}du,$$

$$\cos\gamma = \frac{F}{\sqrt{EG}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{dv}\cdot\frac{du}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{F}{G\sqrt{EG}}\cdot\frac{\partial G}{du}du + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{dv}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{F}{E\sqrt{EG}}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}dv,$$

$$-\cos\delta = \frac{F}{\sqrt{EG}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{dv}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{F}{E\sqrt{EG}}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}dv.$$

Projicirt man die Diagonalen BD und AC auf die Axe der x, so erhält man bezüglich:

$$d_1 x - dx \quad \text{und} \quad d_1 x + dd_1 x + dx.$$

Die Quadrate der Längen dieser Diagonalen sind gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen, also wenn man $BD = q$, $AC = q_1$ setzt:

$$q^2 = Edu^2 - 2Fdudv + Gdv^2,$$

$$q_1^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 + \frac{\partial E}{\partial v}du^2 dv + \frac{\partial G}{\partial u}dudv^2,$$

wo die beiden letzten Glieder zu vernachlässigen sind, wenn AC und BD nur bis zur ersten Ordnung berechnet werden sollen.

Wie in § 11 B) bezeichnen wir die Winkel der Diagonale AC mit AD und AB durch h und h_1, sowie die Winkel der Diagonale BD mit AD und DC bezüglich durch k und k_1, da bis auf ein unendlich Kleines $k_3 = k_1$ war. Es ist dann:

$$\frac{\sin h}{\sin \alpha} = \frac{DC}{AC}, \quad \frac{\sin h_1}{\sin \alpha} = \frac{BC}{AC},$$

$$\frac{\sin k}{\sin \alpha} = \frac{AB}{BD}, \quad \frac{\sin k_1}{\sin \alpha} = \frac{BC}{BD},$$

wo von unendlich Kleinem abgesehen ist, also:

$$\sin h = \frac{\sqrt{EG - F^2} \cdot du}{\sqrt{G}\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}},$$

$$\sin h_1 = \frac{\sqrt{EG - F^2} \cdot dv}{\sqrt{E}\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}},$$

$$\sin k = \frac{\sqrt{EG - F^2} \cdot du}{\sqrt{G}\sqrt{Edu^2 - 2Fdudv + Gdv^2}},$$

$$\sin k_1 = \frac{\sqrt{EG - F^2} \cdot dv}{\sqrt{E}\sqrt{Edu^2 - 2Fdudv + Gdv^2}}.$$

Die Cosinus dieser Winkel erhält man aus:

$$\cos h = \frac{Fdu + Gdv}{q_1\sqrt{G}}, \quad \cos h_1 = \frac{Edu + Fdv}{q_1\sqrt{E}},$$

$$\cos k = \frac{Fdu - Gdv}{q\sqrt{G}}, \quad \cos k_1 = \frac{Edu - Fdv}{q\sqrt{E}},$$

wo q und q_1 die Werthe für die Diagonalen AC und DB sind.

Die Vorzeichen der vier Cosinus bleiben zunächst unbestimmt, da aber, abgesehen vom unendlich Kleinen, $h + h_1 = \alpha$, $k + k_1 = \pi - \alpha$ ist, so bestimmen sich dieselben, wenn man die Werthe von $\sin(h + h_1)$ und $\sin(k + k_1)$ mit denen von $\sin\alpha$ vergleicht, als positiv.

Die Richtungscosinus der Normale finden wir (§ 76):

$$h = \frac{A}{M}, \quad k = \frac{B}{M}, \quad l = \frac{C}{M};$$

die Richtungscosinus der Linien AB, BC, CD, DA in Bezug auf die x-Axe waren:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dx}{ds} + \frac{dsd_1dx - dxd_1ds}{ds^2}, \quad \frac{d_1x}{d_1s_1} + \frac{d_1s_1dd_1x - d_1xdd_1s_1}{d_1s_1^2}, \quad \frac{d_1x_1}{d_1s_1}.$$

Aus diesen Ausdrücken und denen für die andern Axen ergeben sich als Cosinus der Winkel dieser Linien mit der Normale bezüglich

$$\text{von } AB\text{:} \quad \cos\sigma = \frac{A}{M}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{B}{M}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{C}{M}\cdot\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\text{von } DA\text{:} \quad \cos\sigma_3 = \frac{A}{M}\cdot\frac{d_1x}{d_1s_1} + \frac{B}{M}\cdot\frac{d_1y}{d_1s_1} + \frac{C}{M}\cdot\frac{d_1z}{d_1s_1} = 0,$$

wie sich auch augenblicklich direct ergiebt; dagegen erhält man für die Cosinus der Winkel von BC und CD mit der Normale bezüglich:

$$\cos\sigma_1 = \frac{D'dv}{M\sqrt{E}}, \quad \cos\sigma_2 = \frac{D'du}{M\sqrt{G}}.$$

Ebenso ist der Cosinus der Winkels von BD mit der Normale gleich Null, dagegen hat AC mit der Axe der x den Richtungscosinus:

$$\frac{dx + d_1 x + dd_1 x}{q_1},$$

woraus sich für den Cosinus des Winkels dieser Linie mit der Normale ergiebt:

$$\cos \varrho = \frac{D' du dv}{M q_1}.$$

Sind wie in § 11 B) noch ε, ε_1 bezüglich die Ebenenwinkel bei AD und AB, so kann man dieselben folgendermassen bestimmen.

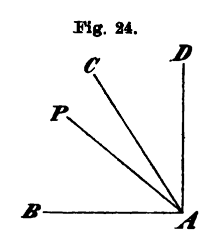


Fig. 24.

Man lege durch AC und die Normale (Fig. 24) eine Ebene, welche die Tangentialebene in AP schneidet und auf der Tangentialebene DAB senkrecht steht. Der Winkel CAP ist dann gleich $\frac{\pi}{2} - \varrho$, $\sphericalangle\, CAD = h$, und Ebenenwinkel $DA = \varepsilon$, in der dreikantigen rechtwinkligen Ecke $ADCP$ ist dann: $\cos \varrho = \sin \varepsilon \sin h$, und in der Ecke $ABPC$: $\cos \varrho = \sin \varepsilon_1 \sin h_1$, wo für $\sin c$ und $\sin \varepsilon$ die Winkel ε, ε_1 selbst gesetzt werden können, man hat also:

$$\varepsilon = \frac{D' \sqrt{G} \cdot dv}{M^2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{D' \sqrt{E} \cdot du}{M^2}.$$

Hieraus ergiebt sich auch § 11 B) der Unterschied $\tau = h + h_1 - \alpha$ nach der Formel $\tau = \frac{\varepsilon \varepsilon_1}{2} \sin \alpha$:

$$h + h_1 - \alpha = \tau = \frac{1}{2} \frac{D'^2 du dv}{M^3},$$

$\pi - \eta$ war der Ebenenwinkel bei AC, $\pi - \eta_1$ der bei BA. Wir fanden § 11 B): $\eta = \frac{\varepsilon \sin \alpha}{\sin h_1}$, und ebenso ergiebt sich: $\eta_1 = \frac{\varepsilon \sin \alpha}{\sin k_1}$,

also:
$$\eta = \frac{D' q_1}{M^2}, \quad \eta_1 = \frac{D' q}{M^2}.$$

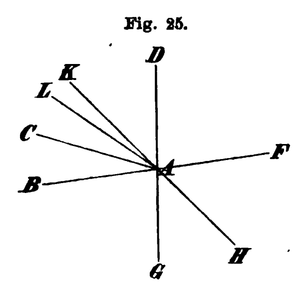


Fig. 25.

Betrachten wir nun die sechskantige Ecke um A (Fig. 25), wo AB und AD die Seiten, AC die Diagonale eines Elementarviereckes, AF, AG, AH dieselben Grössen in Bezug auf das in A daran grenzende Scheitelviereck sind, dann ist abgesehen vom unendlich Kleinen:

$$FAG = \alpha, \quad FAD = GAB = \pi - \alpha,$$
$$FAH = h_1, \quad GAH = h.$$

Den Ebenenwinkel zwischen FAD und DAB hatten wir mit $\pi - m$, den zwischen GAB und DAB mit $\pi - m_1$ bezeichnet.

Seien v und v_1 bezüglich die Winkel von FA und AG mit der Normale, es sind dann die Richtungscosinus von FA bezüglich:

$$\frac{dx}{ds} - d\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds} + \frac{dxd^2s - dsd^2x}{ds^2},$$

und die von GA:

$$\frac{d_1x}{d_1s_1} + \frac{d_1xd_1^2s_1 - d_1s_2d_1^2x}{d_1s_1^2},$$

und hieraus ergiebt sich für die Winkel mit der Normale:

$$\cos v = -\frac{Ddu}{M\sqrt{E}}, \quad \text{und} \quad \cos v_1 = -\frac{D''dv}{M\sqrt{G}}$$

in eben der Weise, wie die Winkel von AC mit der Normale gefunden wurden.

Um die Winkel m und m_1 zu finden, kann man ähnlich wie bei der Bestimmung von ε und ε_1 verfahren. Wir verlängern AH geradlinig nach AK und legen durch AK eine Normalebene, welche die Tangentialebene BAD in AL schneidet, dann ist Winkel $LAK = v - \frac{\pi}{2}$, also: $\sin LAK = \cos(\pi - v) = -\cos v$, und $HAD = \alpha$, also in der rechtwinkligen Ecke $KADL$:

$$-\cos v = \sin\alpha \sin m;$$

ebenso findet man, wenn man in gleicher Weise GA verlängert und durch diese Verlängerung eine Normalebene legt:

$$-\cos v_1 = \sin\alpha \sin m_1,$$

woraus sich ergiebt:

$$m = \frac{Ddu\sqrt{G}}{M^2}, \quad m_1 = \frac{D''dv\sqrt{E}}{M^2}.$$

Bezeichnen wir mit U den Unterschied der vier Winkel der vierkantigen Ecke um A von 2π, so hatten wir § 12: $U = mm_1 \sin\alpha$, also:

$$U = \frac{DD''dudv}{M^3}.$$

Der Unterschied der Winkel der sechskantigen Ecke um A von 2π sei U_1, dann ist nach § 14: $U_1 = U - 2\tau$, also:

$$U_1 = \frac{(DD'' - D'^2)dudv}{M^3}.$$

Endlich ist die Summe der beiden Dreiecke ADB und ADC:

$$F = dsd_1s_1 \sin\alpha = \sqrt{EG - F} \cdot dudv,$$

und für die Krümmung findet sich dann der Ausdruck:

$$\frac{U_1}{F} = \frac{DD'' - D'^2}{M^3},$$

den wir früher auf andere Art fanden.

Geometrische Behandlung einer Minimumsaufgabe.

§ 16.

Es soll hier eine Aufgabe behandelt werden, welche wir an das in § 116 und 117 Enthaltene anknüpfen. Es wurde daselbst zunächst bewiesen, dass sich die Summe oder Differenz zweier nach einem Punkte gezogenen geraden Linien bei einer gewissen Bewegung nicht ändere, indem man zeigte, dass bei einer unendlich kleinen Aenderung der Zuwachs gleich Null war. Da nun dieser Zuwachs aus unendlich kleinen Geraden bestand, so konnten die Schlüsse unmittelbar auf einen Fall übertragen werden, wo die Strahlen sich auf Flächen befanden, also Curven bildeten, da der Zuwachs jeder dieser Curven als unendlich kleine Gerade zu betrachten war.

Hier soll nun eine Aufgabe behandelt werden, wo das Verschwinden des Zuwachses nicht allgemein, sondern nur für eine gewisse Lage stattfindet, was also einen Grenzwerth bedingt. Die Lösung dieser Aufgabe gilt aus dem angegebenen Grunde dann auch für Curven und ist auch anderer Erweiterungen fähig.

Diese Aufgabe lautet:

Es soll derjenige Punkt gefunden werden, dessen Summe der Entfernungen von n gegebenen Punkten ein Minimum ist. Wir setzen hierbei nicht voraus, dass die n Punkte in einer Ebene liegen.

Statt diese Aufgabe analytisch zu behandeln, denken wir uns den gesuchten Punkt O um ein unendlich Weniges in beliebiger Richtung verschoben und bestimmen den Zuwachs, welchen durch diese Verschiebung die nach den n Punkten gezogenen Strahlen erhalten. Die Summe dieser Zunahmen gleich Null gesetzt, giebt dann die Bedingung für das verlangte Minimum.

Fig. 26.

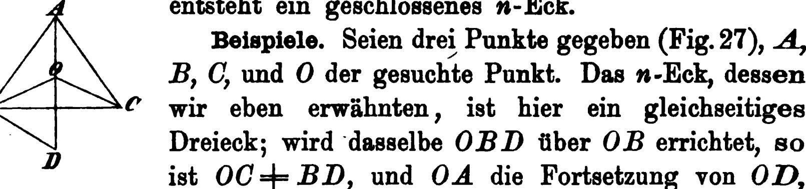
Sei O der gesuchte Punkt (Fig. 26), A einer der gegebenen n Punkte, OO_1 eine beliebige unendlich kleine Verschiebung im Raume von O, Winkel $AOO_1 = \varphi$, O_1U das auf AO gefällte Loth, so ist dann, wegen des unendlich kleinen OU, $AO_1 = AO + OU$, also OU der Zuwachs, den der nach A gezogene Strahl durch die Verschiebung erhält, und dieser ist gleich $-OO_1 \cos\varphi$. Sind dann $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ die nach den n Punkten gezogenen Lothe, so muss die Summe der Verschiebungen im Falle des Minimums verschwinden. Es ist also:

$$\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cdots + \cos\varphi_n = 0.$$

Die Winkel φ sind also diejenigen, welche die Minimumsstrahlen mit einer beliebigen Richtung im Raume machen. Dies führt auf eine geometrische Construction.

Denkt man sich nämlich ein n-Eck im Raume, dessen Seiten alle gleich r sind, und bezüglich die Winkel $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ mit einer beliebigen Richtung machen, dann ist $r \Sigma \cos \varphi$ die Summe der Projectionen auf diese Richtung. Es ist aber die Summe der Projectionen eines geschlossenen Vieleckes auf eine beliebige Linie gleich Null und umgekehrt, und hieraus folgt als nothwendige und ausreichende Bedingung für unser Minimum: Wenn von allen n Strahlen gleiche Stücke abgeschnitten und jedes auf den n Endpunkt des vorhergehenden sich selbst parallel übertragen wird, so entsteht ein geschlossenes n-Eck.

Fig. 27.



Beispiele. Seien drei Punkte gegeben (Fig. 27), A, B, C, und O der gesuchte Punkt. Das n-Eck, dessen wir eben erwähnten, ist hier ein gleichseitiges Dreieck; wird dasselbe OBD über OB errichtet, so ist $OC \# BD$, und OA die Fortsetzung von OD, von den drei Strahlen machen also je zwei Winkel von 120^0 mit einander. Seien vier Punkte gegeben. Da im gleichseitigen Hülfsviereck, wie leicht zu erkennen, immer je zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind, so macht der erste und zweite Strahl des durch die vier Punkte bestimmten Vierecks denselben Winkel als der dritte und vierte Strahl (Fig. 28), sowie der zweite und dritte denselben Winkel als der erste und vierte Strahl. Handelt es sich um ein ebenes Viereck, so bilden die beiden ungleichen Winkel zwei Rechte und die Minimumsstrahlen fallen mit den Diagonalen des Vierecks, welches durch die vier gegebenen Punkte bestimmt ist, zusammen.

Fig. 28.

Uebrigens lassen sich nur in diesen beiden Fällen Constructionen des gesuchten Strahlensystems finden, die auf jede Lage der zu verbindenden Punkte passen. Sind aber mehr als vier Punkte gegeben, so ist deren Lage zu berücksichtigen. Uebrigens bleibt hierüber noch ein Punkt unerledigt, auf den wir zurückkommen werden.

§ 17.

Der Vortheil dieser geometrischen Methode ist der, dass sich das Resultat sofort auf den Fall überträgt, wo die zu verbindenden Punkte und die Minimumsstrahlen auf einer gegebenen Fläche liegen, die letzteren also selbstverständlich geodätische Linien sind.

Auch hier können die unendlich kleinen Linien OO_1, OU, O_1U als geradlinig betrachtet werden (Fig. 26) und es ist $AU = AO_1$ (vgl. § 106, so dass alle Schlüsse unverändert bleiben) und die Formel:

$$\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cdots + \cos\varphi_n = 0$$

noch gilt.

Das Hülfs-n-Eck ist ebenfalls ein geradliniges mit gleichen Seiten, in diesem Falle aber ein ebenes, wenn im Punkte O, von dem die Strahlen ausgehen, eine Tangentialebene und zwar nur eine vorhanden ist, da die Linien OO_1, OU, O_1U auf dieser sich befinden. Bei drei gegebenen Punkten machen also die Minimumsstrahlen ebenfalls Winkel von 120^0 mit einander, bei vier gegebenen Punkten bilden sie die geodätischen Diagonalen des von diesen Punkten gebildeten Vierecks.

§ 18.

Aber unsere Betrachtungen erweitern sich auch nach einer andern Richtung hin.

Seien nämlich n Linien gegeben, zunächst gerade, die aber nicht in einer Ebene liegen, und bestimmen wir den Punkt, von welchem aus sich nach diesen n Linien Lothe ziehen lassen, deren Summe ein Minimum ist. Sei AB (Fig. 29) eine der Linien, O der gesuchte Punkt und OO_1 eine unendlich kleine Verschiebung desselben, OC und O_1C_1 die nach AB gezogenen Lothe, O_1E das Loth von O_1 auf OC, φ wieder der Winkel der Verschiebung mit dem Lothe OA.

Fig. 29.

Nun haben wir $CE = CO_1 = C_1O_1$, abgesehen von Grössen zweiter Ordnung, es ist also $OE = OO_1 \cos\varphi$ der Zuwachs, welchen das Loth durch die Verschiebung erhält; sind also $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ die Winkel der Verschiebung mit den n Lothen, so haben wir für das Minimum wieder

$$\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cdots \cos\varphi_n = 0,$$

und alle vorhin gemachten Schlüsse bleiben richtig. Wohl zu bemerken ist, dass diese Betrachtung illusorisch wird, wenn die n gegebenen Linien in einer Ebene liegen, da dann die Winkel der Verschiebung mit den Lothen constant sind. Sind aber z. B. drei Linien gegeben, die nicht in einer Ebene liegen, so sind die Lothe, wie oben bewiesen, den Seiten eines gleichseitigen Dreieckes parallel, liegen also in einer Ebene und bilden Winkel von 120^0 mit einander. Sofort dehnen wir diese Betrachtungen auf den Fall aus, wo die

gegebenen n Linien auf einer Fläche liegen, und die Lothe geodätische Linien sind. Ferner können statt der n Geraden auch n Curven erscheinen, welche beliebig liegen, wo dann die Lothe wieder Gerade sind. Aber man bemerkt auch sofort, dass diese Betrachtungen noch gelten, wenn statt der Punkte oder Linien n gegebene Flächen erscheinen und die Lothe von der angegebenen Minimal-Eigenschaft in Bezug auf diese zu finden sind. Hier tritt aber ebenfalls ein Ausnahmefall, wie leicht zu sehen, dann ein, wenn die Flächen eben sind und die Seitenflächen eines Prisma bilden.

Wir haben also folgenden allgemeinen Satz: Seien n Gebilde, Punkte, Linien oder Flächen gegeben, seien die Linien gerade oder krumme, mögen sich ferner die Punkte oder Linien frei im Raume oder auf einer Fläche befinden, und sucht man den Punkt, dessen Summe der Entfernungen von diesen n Gebilden ein Minimum ist, so sind die betreffenden Entfernungen, bezüglich die Tangenten derselben in dem gesuchten Punkte immer einem gleichseitigen n-Eck parallel.

§ 19.

Aus dem Vorigen können wir auch leicht die Frage beantworten: Wie lassen sich n Punkte überhaupt durch ein Liniensystem auf die kürzeste Art verbinden, mögen diese Punkte und das gesuchte Liniensystem auf einer Fläche oder frei im Raume liegen? Für n gleich 3 ist diese Frage in dem Vorhergehenden beantwortet, ist n grösser als 3, so denken wir uns zunächst ein beliebiges die Punkte A, B, C, D, E u. s. w. verbindendes Curvensystem. (Fig. 30.) Fixiren wir nun einen Punkt F, von welchem drei Curven nach A, B und G gehen, schneiden, wo F und G Punkte sind, in welchen je drei der Verbindungscurven zusammentreffen. Man hat dann aber eine kürzere Verbindung, nämlich drei Gerade bezüglich geodätische Linien, welche sich unter 120° schneiden. Also müssen je drei Linien sich in einem Punkte schneiden und daselbst Winkel von 120° machen. Bei 4 Punkten (Fig. 31) ist die Anzahl dieser Verbindungslinien fünf, bei n Punkten $2n - 3$.

Fig. 30.

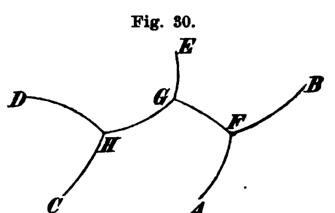
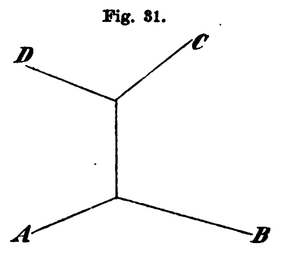


Fig. 31.

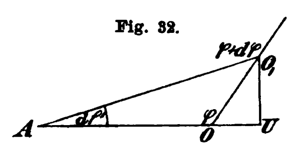


§ 20.

Es ist bei unsern Betrachtungen noch eine Frage unerledigt geblieben, nämlich die, ob die Gleichung $\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 \cdots \cos\varphi_n = 0$ auch ein wirkliches Minimum giebt, denn dazu reicht (siehe § 38) es nicht hin, dass das erste Differential verschwindet, sondern es muss auch das zweite Differential positiv sein.

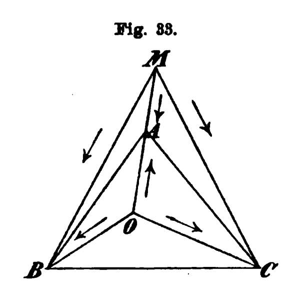
Sei A (Fig. 32) wieder einer der gegebenen Punkte, O der Punkt, von dem die Strahlen $OO_1 = ds$ die Verschiebung und $AO = r$, so ist der Zuwachs, welchen AO durch die Verschiebung erhält $= OU$. Wenn OU auf OA senkrecht steht, der Winkel AOO_1 war gleich φ, also $OU = - ds \cos\varphi$, und das ganze erste Differential $- ds\, \Sigma \cos\varphi$, das zweite Differential ergiebt sich dann gleich $ds\Sigma \sin\varphi d\varphi$. Es ist aber $O_1 U = ds \sin\varphi = r d\varphi$, und man erhält für die zweite Ableitung den Werth: $ds^2 \Sigma \frac{\sin^2\varphi}{r}$, ein Ausdruck der immer positiv ist, wenn die Strahlen r positiv sind.

Fig. 32.



Wir gingen nun davon aus, dass diese Strahlen als positiv angenommen wurden, wenn sich der Punkt O innerhalb des von den n gegebenen Punkten gebildeten n-Ecks befindet, also wenn die Strahlen von den Seiten des n-Ecks eingeschlossen werden. Dann haben z. B., wenn $n = 3$ ist, die Strahlen die in der Fig. 33 angedeutete Richtung, anders aber ist es, wenn z. B. der Punkt O sich dem Punkte A nähert und AO in A selbst gleich Null wird und, nach M heraustretend, die entgegengesetzte Richtung annimmt. Dann sind zwar noch die Strahlen $MB = r_1$ und $MC = r_2$ positiv, aber $MA = r$ negativ, es würde also, falls in $\Sigma \cos\varphi = 0$ wird, der Punkt aber, für den dies stattfindet, so liegt, dass die Strahlen r, r_1 und r_2 alle drei das Dreieck einschliessen, diese Bedingung andeuten, dass nicht $r + r_1 + r_2$, sondern $r_1 + r_2 - r$ ein Minimum ist. Aber auch dies würde nur in dem Falle stattfinden, wenn der Ausdruck

Fig. 33.

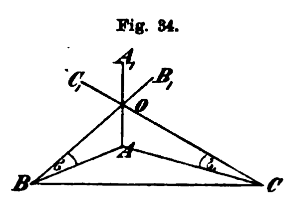


$$\frac{\sin^2\varphi_1}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi_2}{r_2} + \frac{\sin^2\varphi}{r},$$

wo für r der absolute Werth gesetzt ist, positiv für jede Verschiebung ds wäre. Eine Bedingung, die bei dem Dreieck nicht erfüllt wird, wie sogleich dargethan werden soll.

Nun war beim Dreieck die Bedingung für das Minimum, dass die positiven Strahlen Winkel von 120^0 einschliessen, in diesem Falle aber liegt der Punkt O nur dann im Dreieck, wenn Winkel $BAC < 120^0$ ist, und also nur in diesem Falle geben die unter 120^0 sich schneidenden Strahlen das verlangte Minimum. Dass im andern Falle diese Bedingung auch für den Werth $r_1 + r_2 - r$ nicht erfüllt wird, wollen wir noch zeigen. Sei (Fig. 34) $\sphericalangle BAC = 120^0 + \tau$ und BO, OC sowie die positive Verlängerung von OA, also OA_1, die sich unter 120^0 schneidenden Strahlen,

Fig. 34.



$$\sphericalangle OBA = \sigma, \quad OCA = \sigma_1,$$

also

$$BOA = COA = 60^0, \quad BAO = 120^0 - \sigma, \quad CAO = 120^0 - \sigma_1,$$
$$CB = r_1, \quad OC = r_2, \quad OA = r.$$

Sei BO die Richtung der Verschiebung, die wir ja willkürlich annehmen können, so ist φ der Winkel, den die Verlängerung von AO mit der von OB macht, also

$$\varphi = \sphericalangle B_1OA_1 = 60^0, \quad \varphi_1 = B_1OB = 180^0,$$

und der erhabene Winkel

$$\varphi_2 = B_1OC = 300^0, \quad \sin^2\varphi = \sin^2\varphi_2, \quad \sin\varphi_1 = 0,$$

und es muss im Fall, dass ein Minimum stattfindet:

$$\Sigma\frac{\sin^2\varphi}{r} \text{ positiv, d. h. } \left(\frac{\sin 60^0}{r_2}\right)^2 > \frac{1}{r},$$

also $4r^2 < 3r$ sein. Nun ist:

$$r_2 \sin\sigma_1 = r\sin(120^0 - \sigma_1),$$

also müsste $4\sin(120^0 - \sigma_1) < 3\sin\sigma_1$ sein; aber

$$\sin(120^0 - \sigma_1) = \sin(60^0 + \sigma_1) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cos\sigma_1 + \tfrac{1}{2}\sin\sigma_1,$$

es wäre also:

$$2\sqrt{3}\cos\sigma_1 < \sin\sigma_1 \quad \text{oder} \quad 2\sqrt{3} < \operatorname{tg}\sigma_1$$

zu setzen; nun ist aber offenbar σ_1 kleiner als 60^0, also $\operatorname{tg}\sigma_1$ kleiner als $\sqrt{3}$, wodurch unsere Bedingung unmöglich wird.

§ 21.

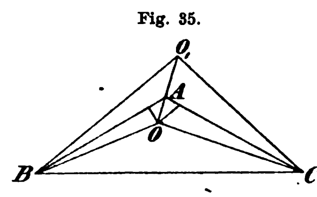
Für den Fall nun, wo der Winkel BAC grösser als 120^0 ist, stellt sich unsere Aufgabe also so:

Für welchen Punkt O ist die Summe der absoluten Werthe der drei Strahlen ein Minimum? Eine Aufgabe dieser Art ist einer rein

algebraischen Lösung überhaupt unzugänglich, da bei einer solchen $OA = r$ beim Ueberschreiten des Punktes A von selbst sein Zeichen ändert. Ebensowenig ist die Bedingung, dass für diesen Fall die Ableitung Null wird, aufrecht zu erhalten, denn diese Bedingung tritt nur dann ein, wenn diese Ableitung continuirlich bleibt, was jetzt für den Uebergang über den Punkt A nicht mehr der Fall ist. Es bleibt also nur die ganz allgemeine Regel geltend: Ein Minimum tritt dann ein, wenn der Zuwachs vom Negativen zum Positiven übergeht. Aufgaben dieser Art, wo die analytische Behandlung einen Zeichenwechsel ergiebt, welcher der Aufgabe nicht entspricht, gehören in ein Gebiet, auf welches zuerst Leibnitz seine Blicke richtete, indem er der Lösung eine Form zu geben verlangte, welche diesen Zeichenwechsel ausschloss. Es sollte dies vermöge eines neuen Zweiges der Analysis geschehen, die er analysis situs nannte. Da dieses Gebiet des Wissens aber bis jetzt nicht vorhanden, vielleicht auch überhaupt nicht möglich ist, müssen wir diese Frage durch eine geometrische Betrachtung beantworten.

Befindet sich der Punkt O unendlich nahe von A (Fig. 35) innerhalb des Dreiecks ABC, dann ist OA die Verschiebung nach A, sei ferner Winkel BAC gleich α, $BAO = \vartheta$, so ist der Zuwachs, welchen die Strahlensumme beim Fortschreiten nach A erleidet, gleich:

Fig. 35.



$$OA (\cos\varphi + \cos(\alpha - \varphi) - 1),$$

schreitet ferner der Punkt von A nach O_1 über A hinaus vor, sodass die Strahlen ausserhalb des Dreiecks liegen, so ist die Strahlensumme $O_1B + O_1A + O_1C$, jedenfalls grösser als die von A ausgehenden: $AB + AC$ da schon $O_1B + O_1C > AB + AC$ ist. Der Zuwachs ist jedenfalls positiv und es findet also in A ein Minimum statt, wenn beim Fortschreiten von O nach A der Zuwachs negativ, also:

$$\cos\varphi + \cos(\alpha - \varphi) < 1, \text{ d. h. } \cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$$

ist, was auch φ sei. Der grösste Werth von $\cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)$ tritt ein, wenn $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ ist, und unsere Bedingung ist also $\cos\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$, oder $\frac{\alpha}{2} > 60^0$, d. h. ist der Winkel α grösser als 120^0, so bilden die Seiten AB und AC selbst die Minimumsstrahlen. Bemerken wir noch, dass einer ähnlichen Behandlung beim ebenen Viereck der Fall unterliegt, wenn ein einspringender Winkel vorhanden ist, also

die Diagonalen sich ausserhalb des Viereckes schneiden. Beim Viereck $ABCD$ im Raume würde dies eintreten, wenn das von einem Eckpunkte D auf das Dreieck ABC gefällte Loth innerhalb des Dreiecks die Ebene desselben trifft.

Allgemeine Eigenschaft einer Schaar gerader Linien, welche einen körperlichen Raum ausfüllen.

§ 22.

Die Schaar der Normalen einer Fläche hat, wie § 52 gezeigt wurde, die Eigenschaft, dass jede derselben von zwei auf ihr folgenden, und im Allgemeinen nur von zweien geschnitten wird. Die durch die gegebene und die eine der sie schneidenden gelegte Ebene schneidet dann die Fläche selbst in einer Krümmungslinie, und da beide Krümmungslinien auf einander senkrecht stehen, so stehen auch die Ebenen, welche jede Normale mit jeder der beiden auf ihr folgenden und welche sie schneiden, macht, aufeinander senkrecht.

Wir wollen nun noch sehen, wie sich eine Schaar von Geraden, die einen körperlichen Raum ausfüllen, verhält, wenn wir nicht die Bedingung stellen, dass dieselbe die Normalen einer Fläche bildet.

Seien $u, v, 0$ die Coordinaten des Punktes, in welchem eine beliebige gerade Linie die xy-Ebene schneidet, so kann man deren Gleichung die Form geben:

$$\frac{x-u}{a} = \frac{y-v}{b} = z, \quad \text{oder:}$$

$$1) \qquad x = az + u, \quad y = bz + v.$$

Sind λ, μ, ν die Richtungscosinus der Geraden, so hat man:

$$a = \frac{\lambda}{\nu}, \quad b = \frac{\mu}{\nu}.$$

Sollen die Gleichungen 1) für eine einen körperlichen Raum ausfüllende Schaar von Geraden gelten, so sind a, b, u, v als Functionen zweier Variablen, also am einfachsten a und b als Functionen von u und v zu betrachten. Sei nun die Gleichung einer Ebene:

$$2) \qquad Ax + By + Cz = 1.$$

Damit diese eine beliebige unserer Geraden enthalten, muss diese Gleichung identisch werden, wenn man für x und y die Werthe aus 1) einsetzt. Es ist somit:

$$(Aa + Bb + C)z + Au + Bv = 1,$$

und zwar für beliebiges z, d. h.:

$$2) \quad Aa + Bb + C = 0 \quad \text{und} \quad 4) \quad Au + Bv = 1.$$

Soll nun diejenige benachbarte Linie gefunden werden, welche mit der betrachteten in einer Ebene, als welche wir die Ebene ansehen, liegt, so müssen die Gleichungen 3) und 4) noch richtig sein, wenn man bezüglich a, b, u, v mit $a + da$, $b + db$, $u + du$, $v + dv$ vertauscht und hieraus ergiebt sich:

$$5)\quad A da + B db = 0, \qquad 6)\quad A du + B dv = 0,$$

woraus sich dann als Bedingung ergiebt:

$$7)\qquad da\, dv = db\, du.$$

Um die Richtung zu finden, in welcher die einander sich schneidenden unendlich nahen Linien liegen, muss für diese etwa u als Function von v gegeben sein. Wir setzen $\frac{du}{dv} = u'$ und erhalten aus Gleichung 7):

$$\frac{\partial a}{\partial u} u' + \frac{\partial a}{\partial v} = \left(\frac{\partial b}{\partial u} u' + \frac{\partial b}{\partial v}\right) u', \qquad \text{oder:}$$

$$8)\qquad u'^2 \frac{\partial b}{\partial v} + u' \left(\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial u}\right) - \frac{\partial a}{\partial v} = 0,$$

also eine quadratische Gleichung für u' und wir sehen hieraus, dass es im Allgemeinen für jede unserer Schaar von Geraden höchstens zwei benachbarte giebt, von welchen sie geschnitten wird. Bezeichnen wir die Werthe von u', welche Gleichung 8) ergiebt, mit k und k_1, so ist:

$$9)\qquad \frac{\partial b}{\partial u}(k + k_1) = \frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v},$$

$$10)\qquad \frac{\partial b}{\partial u} k k_1 = - \frac{\partial a}{\partial v}.$$

In der Gleichung 2) haben wir nun A, B und C zu bestimmen. Die Gleichung 6) giebt nun $B = - A u'$, also wegen 3) und 4):

$$11)\quad A(u - vu') = 1, \quad B(u - vu') = - u', \quad C(u - vu') = vu' - a,$$

wo für u' bezüglich k und k_1 zu setzen ist.

Sind noch α, β, γ die Richtungscosinus des Lothes auf die Ebene, und ihre Entfernung vom Anfangspunkte, also die Gleichung der Ebene, $\alpha x + \beta y + \gamma z = p$, so ist:

$$p = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \alpha = pA, \quad \beta = pB, \quad \gamma = pC.$$

Setzt man in die Gleichung 11) für u' bezüglich die Werthe k und k_1, und bezeichnet die sich für k_1 ergebenden Werthe von A, B, C, p durch A_1, B_1, C_1, p_1, und ist ϑ der Winkel zwischen den beiden so erhaltenen Ebenen, so hat man:

$$p p_1 \cos\vartheta = A A_1 + B B_1 + C C_1,$$

oder:

$$pp_1 \cos\vartheta(u - vk)(u - vk_1) = 1 + kk_1 + (bk - a)(bk_1 - a)$$
$$= 1 - ab(k + k_1) + (b^2 - 1)kk_1,$$

oder wegen 9) und 10):

$$12) \qquad pp_1 \cos\vartheta(u - vk)(u - vk_1)\frac{\partial b}{\partial u}$$
$$= \frac{\partial b}{\partial u}(1 + a^2) + ab\left(\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial u}\right) - (b^2 + 1)\frac{\partial a}{\partial v}.$$

Die Bedingung dafür, dass die Geraden sämmtlich Normalen einer Fläche sind, war nun (§ 45): $\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \mu}{\partial u}$, oder, da $\lambda = \frac{a}{s}$, $\mu = \frac{b}{s}$, $s^2 = \sqrt{1 + a^2 + b^2}$ ist:

$$s^2\frac{\partial a}{\partial v} - a\left(a\frac{\partial a}{\partial v} + b\frac{\partial b}{\partial v}\right) = s^2\frac{\partial b}{\partial u} - b\left(a\frac{\partial a}{\partial u} + b\frac{\partial b}{\partial u}\right),$$

d. h.: $$-(1 + b^2)\frac{\partial a}{\partial v} + (1 + a^2)\frac{\partial b}{\partial u} + ab\left(\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial u}\right) = 0.$$

Dieser verschwindende Ausdruck stimmt mit der rechten Seite von 12) überein. Es sind also diese Geraden Normalen einer Fläche und nur in diesem Falle ist $\cos\vartheta = 0$, also ein Rechter.

Hieraus folgt nun, dass die angegebene Eigenschaft $\vartheta = R$ eine Definitionseigenschaft für die Normalen einer Fläche ist, also:

Ein Schaar gerader Linien bildet dann und nur dann die Normalen einer Fläche, wenn jede Linie von zwei benachbarten so geschnitten wird, dass die beiden Schnittebenen aufeinander senkrecht stehen. Diese Bemerkung ist zuerst von Bertrand gemacht worden.

Für den allgemeinen Fall dagegen, dass die Schaar der Geraden keiner Fläche normal ist, giebt es, wie bereits gesagt, höchstens zwei aber nicht aufeinander senkrechte solcher Schnittebenen. Es sind nämlich zwei vorhanden, wenn erstens Gleichung 8) zwei ungleiche reelle Wurzeln hat, und zweitens beide Werthe von $\cos\vartheta$ aus Gleichung 12) zwischen -1 und $+1$ liegen; nur eine Schnittebene aber ergiebt sich, wenn die Wurzeln von u' aus 8) gleich sind, also wenn man hat:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v}\right)^2 + 4\frac{\partial b}{\partial u}\cdot\frac{\partial a}{\partial v} = 1,$$

und ausserdem $\cos\vartheta$ zwischen -1 und $+1$ liegt.



